**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ХУДЖАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.
АКАДЕМИКА БАБАДЖАНА ГАФУРОВА**

На правах рукописи

МИРШОЕВ АБДУШАХИД АБДУЛМУМИНОВИЧ

ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ У УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ В 7 – 9 КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

13.00.02 – Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровни общего и профессионального образования) (педагогические науки)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание учёной степени кандидата педагогических наук

Научный консультант:
доктор педагогических наук,
профессор **Шодиев Махмад Султонович**

Научный руководитель:
кандидат педагогических наук,
доцент **Раджабов Тагоймурод Бобокулович**

Худжанд - 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. Темпы социального и, как основного современного прогресса, возникающие проблемы качества и эффективности в различных сферах человеческой деятельности во многом зависят от того, насколько наше общество сегодня оказывается способным реализовать исследовательский подход в решении интеллектуальных и практических задач. Такой подход находит свою реализацию в Национальной стратегии реформы системы образования Республики Таджикистана, в которой отмечается необходимость модернизации содержания общего образования, а также подчеркивается, что основными результатами обучения и воспитания должна стать совокупность основных компетенций учащихся в интеллектуальной, творческой, исследовательской и других сферах деятельности, условием достижения которых, является усиление личностно – ориентированного обучения.

Согласно действующему Государственному стандарту общего образования, учащиеся при изучении математики, должны овладеть умениями проводить наблюдения, планировать и выполнять анализ и синтез; выдвигать гипотезы и строить математические модели текстовых задач. У учащихся следует развивать познавательные интересы и компетенции в процессе решения математических исследовательских задач, и самостоятельного приобретения новых знаний подготовки докладов и других исследовательских работ.

Исходя из вышесказанного актуальность проблемы формирования у подрастающего поколения основных компетенций не вызывает сомнение.

Степень разработанность проблемы: В настоящее время одной из ведущих предпосылок успешной деятельности человека являются компетенции. В последнее десятилетие интерес к этой проблеме затрагивается в таких работах ученых как: (А.Г.Асмолов [12], Л.М. Долгова [64], Д.А Иванов [75], В.Н. Кальней [81], М.Кярск [99], А.В.

Хуторский [204], А.К.Марков [115] и др.), которыми проведены исследования коммуникативной, социальной и др. компетенций.

В последнее время существует большое количество исследовательских работ, позволяющих рассматривать исследовательскую деятельность школьников с позиции создания наиболее благоприятных возможностей для реализаций собственного творческого потенциала (Андреев В. И. [9], Леонтонович А.В. [103], В.И.Мареев [116], Оскорбин Д.Н. [139] и другие). Современная практика личностно – ориентированного подхода к обучению школьников нацелена на воспитание свободной личности, способной к творческой самореализации.

Одной из форм творческой деятельности является исследовательская, которая характеризуется недетермированностью и направленностью на получение нового знания.

Так как, исследовательская деятельность является творческой формой, то проблема развития исследовательских компетенций учащихся является составной частью проблемы развития их творческих компетенций.

В современных психолого-педагогических исследованиях (В. И.Андреев [9], В.И.Мареев [116], А.М. Матюшкин [113], П.И Пидкасистый [146], Н.Ф Талызина [186] и др.) отмечаются такие существенные характеристики, как целесообразность, результативность, самоуправляемость. В связи с этим, исследовательская деятельность, школьника приобретает характер самостоятельного компонента образовательного процесса в школе.

Как свидетельствуют многочисленные педагогические труды Беликова В.А. [19], Белухина Д.А. [20], Беспалько В. П. [23], которые, рассматривая исследовательскую деятельность, считают, что высокая значимость ее результатов способна оказывать существенное воздействие на интеллектуальное и эмоционально – волевое поведение учащихся.

Существенная значимость исследовательской деятельности при преподавании математике отмечается в работах ученых - математиков и методистов: Болтянский В.Г. [24], Гнеденко Б.В. [56], Колягин Ю.М. [88], Нугмонов М. [133], Шварцбурда С.И. [215].

Процесс привлечения учащихся к исследовательской деятельности при изучении школьного курса математики рассматривается в диссертационных исследованиях Е.В. Барановой [17], А.К. Марков [115], Л.В. Лихачева [106], Н.А. Меньшиковой [118], Ольбинского И.Б. [137], М.В. Таранова [189], Н. В. Толпекиной [192], М.Ю. Целебровской [205] и др.

Наиболее благоприятные пути активизации учебного познания при изучении математики – это организация исследовательской деятельности учащихся в этом процессе, указывают В.И. Андреев [9], Г.Д. Балк [15], Л.В. Виноградова [40], В.А. Далингер [59], Д. Пойа [150],Г.И. Саранцев [168], А.А. Столяр [185] и др.

Некоторые аспекты формирования исследовательских умений учащихся при изучении исследовались в работах В.А. Гусева [54], Н.М. Мочаловой [126],Л.А. Михеевой [122], О. В. Охтеменко [141], Е.В. Поздняковой [149], А.Ю. Фадеева [196], С.Н. Чернышевой [208], Е.Г.Шинкаренко [214] и др.

Методические приемы совершенствования содержания и концепции изложения курса того или иного школьного предмета, обучение которому способствует развитию исследовательских умений и навыков учащихся, отмечается в трудах Пестерева В.А. [145], Раджабова Т.Б. [157], Ивановой Т.А. [76]- математике, Андреева В.И. [9], Разумовского В.Г. [158], Никитиной С.В. [130] – по физике, Иодко А.К. [79]- по химии.

Большое значение в решении указанной проблемы, в связи с углубленным изучением математики, играют исследования Викола Б.А. [38], Глухова М.И. [49], Шинкаренко. Е.Г [214], предлагающих совершенную методику формирования элементов исследовательской деятельности в процессе обучения математике детей с признаками математической одаренности в классах с углубленным изучением математики. Приводится система исследовательских задач по математическому анализу геометрии, формирующих элементы исследовательской деятельности.

Особо следует отметить диссертационное исследование Скарбича С.Н. [178], в котором разработана методика формирования исследовательской компетенции при решении планиметрических задач как средства развития геометрической готовности учащихся.

Анализ педагого-психологической и методической литературы показывает, что проблема формирования исследовательских умений, как компонента исследовательских компетенций в процессе обучения алгебре 7–9 классов общеобразовательной средней школы разработана недостаточно.

Результаты анкетирования, бесед, опросов учащихся и учителей, анализ процесса изучения алгебры свидетельствуют о том, что педагогами исследовательский подход в обучении используется разрозненно и недостаточно, поэтому многие учащихся не владеют способностью самостоятельно «открывать» новые знания.

Необходимость и правомерность своевременного формирования исследовательских компетенций у учащихся определена на основе следующих положений:

- исследовательские компетенции формируются в процессе исследовательской алгебраической деятельности и определяются ее специфическими особенностями;
- компетенции не образуются в процессе обучения математике сами по себе. Необходима специально построенная методика их формирования в различных видах учебной алгебраической деятельности под руководством учителя;

- в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов появляется возможность непосредственно активного воздействия на каждого отдельного учащегося. При изучении алгебры учащиеся овладевают умением анализировать, синтезировать, обобщать, математически моделировать реальную ситуацию, находить пути решения поставленной задачи. Решение задач является основой личностного математического развития учащихся.

В процессе решения задач закрепляются и развиваются волевые черты характера учащихся; формируется разумный и устойчивый стиль деятельности; воспитывается ответственность за начатое дело и потребность в его доведении до конца и т.д.

Анализ школьной практики показывает, что у учащихся на требуемом уровне, сформировано умение решать задачи, но не сформирован правильный, разумный подход к поиску способа решения. Это является результатом того, что учащиеся решают однотипные задачи, следуя по образцу, показанному учителем, при этом учащиеся не осознают осуществляемую ими математическую деятельность.

Таким образом, анализ соответствующей литературы показывает, что необходимо теоретическое обоснование проблемы развития исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре 7-9 классов. Система методов достижения этой цели требует дополнительного исследования.

Остается неясной сущность исследовательских компетенций и уровней ее развития у учащихся в процессе обучения алгебре 7-9 классов. Методика не располагает данными о том, какие компоненты исследовательских компетенций оказывают наиболее существенное влияние на содержание, методы и организационные формы обучения. Тем самым, методика не в состоянии дать достаточно обоснованные рекомендации для повышения эффективности развития исследовательских компетенций учащихся в массовой школе.

С одной стороны, в науке созданы предпосылки обоснования возможности эффективного развития личности в процессе исследовательской деятельности; с другой стороны, анализ существующей литературы и изучение имеющегося в педагогике опыта, свидетельствует о наличии следующих **противоречий:**

- между социальным заказом, предъявляемым образовательным учреждениям на подготовку к учебно-исследовательской деятельности и нецеленаправленным способам организации данного процесса;
- необходимостью изучения проблемы формирования исследовательских компетенций учащихся, как ключевых и специально обойдённых вниманием исследователей;
- потребностью школьной практики об основной методике формирования исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов и отсутствием таковой.

С учетом вышесказанного нами была сформулирована проблема данного диссертационного исследования.

Проблемой исследования является выделение системы исследовательских компетенций, характеризующих сущность исследовательской деятельности учащихся в процессе изучения алгебраического материала, а также разработка методики формирования этих компетенций и их использование при решении алгебраических заданий в 7 – 9 классах средней школы.

Цель настоящего исследования – теоретическое обоснование и практическая разработка методики преподавания учащимися алгебраического материала и решения алгебраических задач, направленных на эффективное формирование исследовательских компетенций в рамках современных концепций образования.

Объект исследования: учебно–воспитательная работа в процессе изучения алгебры 7 – 9 классов средней школы.

Предмет исследования: методические приемы и пути эффективного формирования исследовательских компетенций учащихся и процессе изучения алгебры 7 – 9 классов и их применение при решении повышенной трудности алгебраических задач.

Гипотеза исследования: Пути, средства и формы процесса формирования исследовательских компетенций учащихся в процессе изучения алгебры 7 – 9 классов будет наиболее качественно, если:

- определены содержание и структура исследовательской деятельности учащихся в процессе изучения алгебры 7 – 9 классов и уточнены системы исследовательских компетенций;
- раскрыты благоприятные возможности формирования исследовательских компетенций учащихся при изучении алгебры 7 – 9 классов и их применение в процессе решения алгебраических задач повышенной трудности;
- разработаны эффективные пути и средства формирования исследовательских компетенций в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов;
- экспериментально проверена эффективность предлагаемой методики.

Исходя из объекта, предмета, цели и гипотезы исследования намечено решение следующих **задач**:

- проанализировать сущность исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения математике и определить составляющие их исследовательские компетенции;
- выделить систему исследовательских компетенций учащихся и раскрыть благоприятные условия их формирования в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов;
- разработать методические приемы и пути формирования исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре 7–9 классов и их использование при решении задач повышенной трудности;
- экспериментально проверить эффективность предлагаемой методики.

Методологические основы исследования:

- теория компетентностного подхода в образовании (Л.М. Долгова [64], Д.А. Иванова [75], В.Н. Кальней [81], М Кярск [99], А.В. Хуторский [203] и др.);

- концепция современных форм обучения (А. Н. Алексеев [6], Ю.К. Бабанский [19], Л. В. Занков [70], Лернер И.Я. [105], Матюшкин А.М. [113], Махмутов М.И. [114], Скаткин М.Н. [179], Т. Н. Шамова [209], Г. И. Щукина [216] и др.);

- индивидуализированный и дифференцированный подход к обучению (Ананьев Б.Г. [7], Андреев В.И. [8], Асмолов А. Г. [12], Кирсанов А.А. [85], Л.Н. Леоньтев [104], Пидкасистый П.И. [146] и др.);

- концепция организации исследовательской деятельности школьников в процессе обучения (Обухов А.С. [134], Леонтонович А.В. [103] и др.);

- теория обучения учащихся решению задач (Гусев В.А. [54], Далингер В.А. [57], Колягин Ю.М. [89], Пойа Д. [150] и др.).

Для решения поставленных задач были применены следующие **методы исследования**: теоретический анализ философской, педагого - психологической методической литературы; изучение портативных документов об организации исследовательской деятельности учащихся; анкетирование; беседа тестирование изучение самооценки учащихся; педагогические наблюдения; педагогический эксперимент (констатирующий, поисковый и формирующий); методы статической обработки экспериментальных данных.

Опытно - экспериментальная база исследования: средние общеобразовательные школы Согдийской области Республики Таджикистан, в том числе: средние школы Матчинского района №17, №6, №31, города Истаравшан №1, №20, №14

Педагогический эксперимент проводился с 2013 по 2019 гг. и состоит из нескольких этапов.

На первом констатирующем этапе (2014-2015) изучалась и анализировалась современная психолого-педагогическая, методическая литература по проблеме исследования; осмысливались теоретико-методологические основы исследования; проводился анализ альтернативно действующих учебников по алгебре 7-9 классов; анализ деятельности учителей по формированию у учащихся исследовательских компетенций. На этом этапе была выдвинута и разработана гипотеза; конкретизированы цель и задачи исследования; проведена корректировка некоторых элементов педагогического эксперимента.

На втором этапе (2015-2018г) проводилась опытно-экспериментальная работа, в процессе которой обрабатывался вариант методики формирования исследовательских компетенций учащихся при изучении алгебры 7-9 классов средней школы; проверялась эффективность его использования. Регулярно, в течение каждого учебного года, приводились примеры уровня сформированных у учащихся исследовательских компетенции. Сравнения полученных результатов с исходным уровнем сформированности этих компетенций, позволили выявить динамику в их развитии и определить ее направление. Результаты исследования были опубликованы в ряде научных статей.

На третьем этапе (2018-2019) полученные результаты сравнивались и обрабатывались. На этой основе формулировались выводы исследования и проводились контрольно-оценочные срезы, данные которых, обосновали достоверность результатов и выводов проведенного диссертационного исследования.

Научная новизна исследования состоит в том, что:

- теоретически обоснована необходимость формирования исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре 7-9 классов;

- предложена система исследовательских компетенций и возможности их формирования в процессе обучения алгебре 7-9 классов.

- раскрыты способы использования исследовательских компетенций в процессе решения задач повышенной трудности по алгебре в 7-9 классах;

- выявлены и экспериментально обоснованы пути, приемы продуктивного формирования исследовательских компетенций школьников при изучении алгебры 7-9 классов;

- разработана эффективная методика формирования исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре 7-9 классов.

Теоретическая значимость настоящего исследования: заключается в существенном вкладе в теорию и методику обучения и воспитания; сущности, содержании и структуре математических знаний и методике формирования исследовательских компетенций у учащихся в процессе обучения алгебре 7-9 классов;

- выделена система исследовательских компетенций учащихся основной школы, необходимых для успешного включения в исследовательскую деятельность;

- разработана система формирования исследовательских компетенций у учащихся в процессе изучения алгебры 7-9 классов и определены этапы её реализации;

- определено содержание деятельности учителя и учебно-познавательной деятельности учащихся на каждом этапе процесса формирования исследовательских компетенции в условиях развивающего обучения, которые могут быть трансформированы и в другие частные методики.

Практическая значимость исследования состоит в разработке методических рекомендаций, обеспечивающих систематическое формирование исследовательских компетенций у школьников; предложены эвристические приемы решения задачи повышенной трудности по алгебре для 7-9 классов; разработана и апробирована методика системы формирования исследовательских компетенций школьников в процессе изучения алгебры 7-9 классов, в условия развивающего обучения.

Результаты диссертационного исследования, также могут быть использованы в практике работы различных учебных заведений; курсах повышения квалификации учителей; при составлении учебных и методических пособий по алгебре.

Апробация и внедрение результатов исследования осуществлялись:

- в процессе разработки специальных методических материалов по формированию исследовательских компетенции учащихся по алгебре в целом.

- на заседаниях кафедры методики преподавания математики и информационного технологии ХГУ имена академика Б. Гафурова и ТГПУ имена С. Айни.

- на курсах повышения квалификации учителей математики Согдийской области и Ц. И.У.Р.Н в городе Душанбе;

- на научных конференциях, семинарах по вопросам теории и методики обучения и воспитания математички в том числе:

- участие на международном Германском семинаре по изучению программы компетентности в Европе и Азии (университете Кобленз-Ландау, Германия);

- участие на республиканских семинарах по Государственной программе качественного образования №2;

- участие в региональных семинарах по Государственной программе качественного образования №1;

- участие в профессорско-преподавательских конференциях и семинарах по проблеме теории и методика обучения математике.

Основные положения, выносимые на защиту:

1.Исследовательские компетенции учащихся как результат их исследовательской деятельности является составной частью процесса обучения математике в целом.

2. Исследовательские компетенции, выявленные в процессе анализа деятельности учащихся основной средней школы, при изучении

алгебраического материала 7-9 классов, можно также и широко использовать в процессе изучения теоретического материала курса алгебры 7-9 классов и при решении алгебраических задач.

3. Сформированные исследовательские компетенции, являясь основной деятельностью учащихся по решению алгебраических задач, эффективно влияют на знания учащихся по алгебре, повышают результативность учащихся в решении алгебраических задач в целом.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, выводов и практических рекомендаций, списка использованной литературы. Общее число страниц компьютерного набора 162, список использованных источников включает наименования.

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКО - МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

§ 1.1. Теоретические основы развития исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения математике

При обучении математике и модернизации содержания общего образования РТ отмечено, что основным результатом процесса воспитания и обучения должен стать комплекс основных компетенций учащихся в разнообразных сферах деятельности (интеллектуальная, творческая, исследовательская и др.). Необходимым условием достижения данных компетенций может быть только усиление развивающего обучения.

Возникает необходимость рассмотрения современных понятий «компетенция» и «компетентность». Раскрывая значение данных понятий в Большом англо-русском словаре (29, с.1536) приводится всего несколько объяснений «competence», которые можно расшифровать как:

1) способность, умения; 2) компетентность; 3) достаток; 4) компетенция, правомочность;

2) «competency» как «competence»; «competent» в нескольких значениях: компетентный, знающий; достаточный; полноправный, правомочный.

В Современном словаре иностранных слов: толкование, словоупотребление, словообразование, этимология (183, с. 960) понятие «компетентность» отсутствует, но есть коренные слова «компетентный» и «компетенция», которые разделяются по смысловому содержанию:

Компетентный: 1) обладающий компетенцией - кругом полномочий какого - либо лица или кругом дел, вопросов, подлежащих чему - либо ведению; 2) обладающий основательными знаниями в какой - либо области; знающий, веский авторитетный. Франц. competent – компетентный; правомочный; род. п. competent is – соответствующий, способный, от competere - требовать, соответствовать, быть годным.

Понятие «компетенция» объясняется как круг полномочий какого-либо учреждения, государственного органа или должностного лица; круг вопросов, в которых кто-то хорошо осведомлен или профессионально разбирается со знанием дела.

В БСЭ понятие «компетентность» не приведено, но раскрыто понятие «компетенция», где за основу взят латинский перевод, который звучит так: «добиваюсь, достигаю, соответствую», или совокупность полномочий какого-либо органа или должностного лица, установленных законом, уставом органа или другими положениями. [28]

Не опираясь на характеристику схожих определений в других источниках, в качестве рабочего положения мы выбрали следующее: «компетентный» есть качество человека, а «компетенция» - это то, что может человек, или должен хорошо делать на законных основаниях».

На современном этапе большинство педагогов соотносят и определяют компетенции и компетентность по А.В.Хуторскому[203], который дал объяснение данным понятиям по отношению к учащимся.

Компетенция, как он отмечает, есть понятие отчужденное, заданное наперед соц.требованием к образованию и подготовке ученика, которое необходимо для успешной и продуктивной деятельности в определенной сфере. А компетентность раскрывается им, как овладение учащимся соответствующей компетенцией и заключающее в себе личностное отношение к ней и предмету деятельности.

По Алексееву С.В. [4], компетентность – это состоявшееся личностное качество или совокупность качеств учащегося и минимальный опыт деятельности в заданной сфере. Компетенции должны предлагаться ученикам для формирования соответствующих компетенций.

Как видно из анализа, определение данное Хуторским А.В[203] не раскрывает компетенцию, как понятие, но отличается своей простотой и конкретностью (основное требование к ученику).

Исходя из разных определений и формулировок понятия «компетенция» (по Хуторскому А.В. и И.А. Зимней[72]), можно отметить схожесть взглядов в вопросе формирования компетенций.

Данное решение этой проблемы необходимо рассмотреть с точки зрения российских исследователей.

А.С. Мельничук и Е.В. Селезнева [176], пытались представить компетентность как систему определенных компетенций. Эту позицию поддерживает В.Ю. Грук [55], которая выделяет умения и навыки, необходимые для любой деятельности (учеба, работа, социальная и бытовая сфера) в группу компетенций.

При этом под «компетенцией» необходимо понимать совокупность целостно-смысловых ориентаций, знаний, навыков и умений, способностей, сформированных и проявляющихся в практической деятельности и обеспечивающих возможность достичь запланированного результата и соответствовать общественным требованиям. В данном определении компетенции выступают как составляющие компетентности.

В данном исследовании, компетентность была определена нами как процесс овладения конкретными компетенциями, с целью ощущения себя компетентным в области исследовательской деятельности при наличии исследовательских компетенций.

С этой позиции, исследовательские компетенции рассмотрены нами как общие, способствующие (по нашему мнению) успешности в последующей жизни и самообразованию, а также подготавливающие к творческому труду.

Для выявления содержания и структуры исследовательских компетенций необходимо провести анализ сущности учебно-исследовательской деятельности, а также рассмотреть различные научные направления в сфере определения исследовательских умений.

Рассматривая работы Е.В. Барановой [17], В.А. Далингер [57], И.Я.Лернер [105], М.И.Махмутово [114], А.А. Столяр [185] и др., мы определили, что учебно - исследовательская деятельность включает в себя следующие компоненты: мотив, цель (проблемы), действия и операции, действия оценки и контроля. Основными этапами учебно – исследовательской деятельности являются: постановка проблемы, выдвижение гипотезы, доказательство (опровержения) гипотезы.

Нами было определено, что учебная и исследовательская деятельность заключает в себе следующие компоненты: мотив, цель или проблемы, операции и действия, оценку и контроль.

Основными этапами этого вида деятельности можно назвать следующие:

-постановка проблемы;

-выдвижение гипотезы;

-доказательство или опровержение гипотезы.

Особенность данного вида деятельности учащихся заключается в следующем:

- овладение знаниями и умениями в процессе исследования;

- направленность в сторону усвоения приемов, способов научных методов познания (сравнение и аналогия, дедукция, индукция, анализ и синтез, абстрагирование и моделирование и т.д.);

-непосредственное влияние на изменение личности и ее развития (целеустремленности, развитие творческого потенциала и любознательности).

Значительное место в учебной и исследовательской деятельности учащихся многие ученые (В.И. Андреев, Л.И. Виноградова[40]) выделяют мотивации, характеризующей отношение учащихся к данной деятельности и стремление добиваться успехов.

В.И. Андреев [9] в развитии мотивации учебно-исследовательской деятельности определил пять уровней:

На первом уровне отсутствует стремление действовать по собственной инициативе, самостоятельно, отсутствие поиска объяснений и доказательств наблюдаемых объектов.

На втором уровне демонстрация стремления к репродуктивной деятельности (подражание) и проявление незначительного интереса при решении простых исследовательских задач, пытается самостоятельно находить решение.

На третьем уровне интерес, желание и стремление к исследовательской и репродуктивной деятельности равнозначны. Положительная мотивация выявляется периодически.

<u>На четвертом уровне</u> проявляет инициативу в решении и поиске исследовательских задач.

<u>На пятом уровне</u> появляется интерес к решению сложных исследовательских задач.

Некоторые ученые (В.И. Андреев[9], А.В. Андриенко[10]) выделили взаимосвязь между определенными качествами личности (решительность, настойчивость, целеустремленность, дисциплинированность ответственность и др.) и повышением качества усвоения знаний и навыков учеников.

Д.Брунер [32] говорил о том, что выдвижение гипотез способствует допущению ошибок, а неуверенный и робкий человек не способен (по Звереву Н.М. [71]) допустить этого. Исходя из этого, можно отметить ряд причин слабого развития волевых качеств: страх ответственности, непредвиденности и потеря веры;

Развитие целеустремленности способствует развитию умения правильной организации, и распределения во времени своего труда, реализовывать последовательно ее этапы.

Особенность учебно-исследовательской деятельности состоит в том, что она постоянно связана с проблемой, поиском путей решения и при этом принятие самой проблемы со стороны учащегося зависит от уровня любознательности. Словами Л.В. Виноградова [40, с.84] это звучит так: «Это стремление к более глубокому анализу явлений, познанию новой неизвестной закономерности». В ходе проведенного нами исследования был сделан вывод о слабом развитии любознательности и отсутствии стремления к самостоятельному поиску у учеников 7-9 классов.

Теперь рассмотрим различные направления к определению понятия исследовательских умений.

Исходя из вышеизложенного, мы решили подробно остановиться на определении понятия «исследовательские умения». Проведенный анализ показал отсутствие четкого определения данного понятия. Если судить по российской педагогической энциклопедии[162, с.672], «умение – это освоенные человеком способы выполнения действий, обеспечиваемые совокупностью приобретенных знаний, навыков», а другие авторы смотрят на это по-другому:

И.С. Якиманская [220, с.31-41] «умение-это овладение технологией деятельности, то есть процессом ее построения, контроля, оценки и коррекции»;

А.В. Усова[193, с.45-48] «умение – это возможность выполнять действие в соответствии с целями и условиями, в которых приходиться ориентироваться субъекту»;

К.К. Платонов[148, с.98-103] «умение – это способность человека выполнять какую-либо деятельность на основе раннее полученного опыта».

В дальнейшем, нами было принято решение подразумевать под понятием «умение» способность выполнять определенные действия (умственные и практические) с использованием определенных приемов и способов.

Затем мы подошли к рассмотрению понятия «исследовательское умение» с точек зрения разных исследователей, например:

- Л.А. Михеев [122] исследовательские умения рассматривает как способность учащихся к сознательному выполнению умственных и практических действий, имеющих свою логику исследования;

- О.В. Охтеменко [141] понимает под ними сознательно выполняемые интеллектуальные операции, и которые одновременно становятся способами осуществления действий;

- В.А. Андреев [11] определяет их как умение применять приемы соответствующих научных методов познания.

-Мнение М.Ю. Целебровской [205] созвучно с этим определением. Она подчеркивает аналогичность слова «метод» слову «умение», раскрывая содержание следующим способом «анализ, синтез, наблюдение» и т.д.;

- Е.В. Позднякова [149] рассматривает в своей работе общие исследовательские умения или познавательные, которые обеспечивают успешное осуществление поиска;

- Н.М. Зверева [71], на основе моделей Г.Уолесса [207], А.Р. Лурии [110], называет познавательные умения элементами исследовательской деятельности, подчеркивая их интегральность (включая в себя овладение методами научного познания, владение приемами мышления, которое будет правильно способствовать правильной организации проверки гипотез);

Н.М. Мочалова [126] представляет исследовательские умения в качестве совокупности приемов для появления возможности осуществления поисковой деятельности. При этом она выделяет такие приемы, как: анализ и установка причинно-следственных связей; составление, объединение, выдвижение гипотез, применение знаний в новой ситуации, поиск аналога и нового метода решения;

А.И. Савенков [169] обращает внимание на инструментальные умения творческого и логического мышления, необходимые в решении исследовательских задач;

Деятельности (табл. Приборы и материалы), графическая и математическая интерпретация результатов;

Л.В. Виноградова [39] выделяла системы мыслительного умения, как «функционирование которых характерно для процесса решения нестандартных задач»;

Ю.М. Колягин [88, с.162-170], Г.Л. Луканкин [119], В.А. Оганесян [88, с.152-154] определяю системы мыслительные умения, «функционирование которых характерно для процесса решения нестандартных задач»;

С.Н.Чернышева [208] выдвигала предложение определить умения как самый высокий уровень развития общих учебно-познавательных умений, так как особо важные психические процессы становятся обязательными для основы развития данных умений;

Т.Б. Раджабов [157] рассматривает умение разбиения задач на подзадачи и умения установления структурного сходства внешне различных систем (задач) как метод исследовательский деятельности учащихся. Умения, которые составляют их основы, называет исследовательские: при обучении геометрии в неполной средней школе.

Анализ содержания многих исследовательских работ показал, что содержание и его составляющие – исследовательскую деятельность и личностные качества автор исследования предложил представить в виде исследовательских компетенций на основе интеграции знаний и практических умений, а также с учетом личностных качеств в виде четырех компонентов: мотивационный, когнитивный, деятельностный и личностный.

Исходя из того, что мотивационный, информационный и личностный компоненты были рассмотрены выше, деятельностные компоненты будут рассмотрены детально.

Основным элементом исследовательской деятельности становится выдвижение и доказательство гипотезы. По П.И. Соверткову предложение, выдвигаемое для объяснения какого-либо явления, требующего проверки и доказательства, именуется гипотезой [193]. "Переход от конкретных и реально воспринимаемых явлений к неизвестным, то есть «познание нового» требует выдвижения предположений. (Волхопский А.И.) [42, с.42-44].

Рассмотрение проблем разработки гипотез отмечается в работах А.В. Брушлинского [34], Ю.Н. Кулюткина [98], Я.А. Пономарев [152] и др. А.В. Брушлинский [34] отмечает, что мышление происходит последовательно и человек предварительно продумывает будущие действия, подумывать решения. Основа механизма предвосхищения состоит в том, что неизвестные анализируются через отношение к известному.

В исследованиях многих видных учёных отмечено, что при исследовании гипотезы оказываются задействованными логическими рассуждениями и интуитивными процессами. Различные аспекты интуиции рассматривали В.Ф. Асмус [11], Дж. Брунер [32], А.М.Прохрова, Пономарев Я.А. [152] и др. По мнению Дж. Брунер [31], «проблема природы интуиции – это проблема таких интеллектуальных приемов, с помощью которых предварительно формулируются положения без применения аналитических приемов, посредством которых можно установить, являются ли такие положения обоснованными… Интуиции – это непосредственное понимание или знание. Интуиция подразумевает акт схватывания знания, важности, структуры задачи или ситуации, это делается без опоры на развернутые аналитические средства. Интуиция позволяет быстро выдвинуть гипотезу или поделить существенное сочетание понятий до того, как становится известной их ценность» Дж. Брунер [32, с.53-62].

Следуя Дж.Брунеру [32, с.53-62] гипотеза трактуется нами как продукт интуитивного мышления, которое основывается на свернутом восприятии всей проблемы сразу. Развитию интуитивного мышления содействует использование эвристических приемов, общие эвристические правила – использование аналогии, обследование круга условий, наглядное выражение решения.

По мнению Ю.Н.Кулюткина [103], гипотеза – это некоторый план, предвосхищающий результаты реальных преобразований. Некоторые аспекты разработанной гипотезы рассматривались и в работах Д. Пойа [151]. С его точки зрения, в основе выдвижения гипотезы лежит использование в том или ином виде прошлого опыта субъекта и анализ отношений известного с неизвестным.

Изучение соответствующих научных источников позволило выявить следующие варианты «рождения» гипотезы, определяемой преобладанием того или иного вида умственной деятельности школьника:

- гипотеза зарождается на основе опыта, эксперимента (опытная гипотеза);

- гипотеза проявляется на основе дедукции, то есть рассуждение от частного к общему (индуктивная гипотеза);
- гипотеза выдвигается на основе озарения – инсайта (интуитивная гипотеза);
- гипотеза рождается на основе дедукции, то есть рассуждении от общего к частному (дедуктивная гипотеза);
- гипотеза выдвигается на основе прошлого опыта субъекта (гипотеза по аналогии).

Шесть случаев, что когда рождение интуитивно – опытной гипотезы (если учащийся, не зная строгих определений каких – то геометрических фактов, но имея интуитивное представления о них, может с помощью опыта выявить те или иные взаимосвязи) и опытно – индуктивной (если ученик, проводя для частных случаев, приходит к общему заключению) приводятся в научных трудах Д.А. Белухина [20].

Проверить гипотезу – значит установить, что следствия, которые из нее должны вытекать, действительно, совпадают с наблюдаемыми явлениями. Проверяя гипотезу, необходимо выяснить, не противоречит ли она ранее установленным законам, правилам А.В. Андриенко [10].

Эффективные пути формирования умений у учащихся выдвигать гипотезы, должны способствовать осознанию ими необходимости последующего ее доказательства. Доказательство гипотезы направленно на поиск учащимися нового методов решения задач, нахождение альтернативных методов и их взаимосвязей, что обеспечивает «открыть» новых знаний, их углубление и систематизация.

Р.С. Черкасов, А.А. Столяр в своих научных трудах отмечают, что «Рождение идеи – явления яркое, нередко подобное вспышке света; но этой вспышке предшествует, как правило, длительное, многократное напряжение мысли, интереса и внимания, в результате чего создается то эмоциональное поле, на котором и возникают новые идеи, догадки» Можно получить новые знания об объекте, лишь включая его в разнообразные новые связи. Всегда сложные задачи характеризуются тем, что информация о получаемом добывается путем, «многоступенчатого» анализа, когда один объект определяется относительно другого, другой – относительно третьего и. т.д., и только на конечной стадии такой лестницы находится искомый объект. Поэтому определение связей между объектами задачи и их свойствами, нахождение дополнительных элементов в задаче, связей между ними и данными элементами тесно связано с методами анализа, синтеза, сравнения. Следует отменить, что значение в процессе анализа велико нахождение дополнительных элементов в задаче, так как опыт показывает, что увидеть нужные дополнительные элементы в задаче могут не все учащиеся. В практике преподавания часто наблюдаются моменты, когда учащиеся находят и используют для решения дополнительные элементы вслепую. В некоторых ситуациях, найденные дополнительные элементы, оказываются целесообразными и задачи решаются, но при этом создается видимость, будто успех в выборе дополнительных элементов зависит от случайных обстоятельств. Безусловно, есть много алгебраических задач, для которых нахождение дополнительных элементов – это искусство, которым владеют лишь некоторые учащиеся. Овладевая этими компетенциями, школьники закладывают опыт в сбор важной информации для решения задачи, объединяют всю информацию об объектах.

Во многих источниках Т.Б. Раджабова [157] отмечается, что установление связей между объектами задачи и их свойствами предполагает сравнения и анализ свойств объектов. Процесс поиска таких связей носит «эвристический характер и происходит, как правило, на интуитивном уровне». На первых шагах исследователь произвольно выбирает свойства из набора известных ему свойств, а получив определенный опыт в решения задач, начинает выбирать те, которые ему представляются наиболее важными для достижения цели. В этом процессе может случиться, что некоторые свойства, выявленные исследователем, окажутся в дальнейшем «неработающими», ненужными.

В жизненной практике человек имеет дело с множеством фактов, которые имеют различную степень достоверности, поэтому важно научить школьников видеть нужную для правильности решения проблемы необходимую информацию. Повседневные задачи содержат в себе важные факты. В процессе исследования жизненной ситуации можно не суметь выделить все необходимые сведения, может случиться и так, что окажется слишком много сведений, которые необходимо «фильтровать» и отбросить несущественные, поэтому человеку важно уметь выделять избыточные и недостающие факты.

Владея умением разбивать задачу на подзадачи, учащиеся могут расчленять исходную задачу на более элементарные задачи или задачи, алгоритм решения которых существует. Систематизацию известной информации к решаемой задаче является показателем организации мыслительной деятельности учащихся. Необходимость этого умения в процессе решения задачи была рассмотрена в работах П. И. Соверткова [180], М.В. Тарановой [189], Л. М. Фридмана [200].

Пути поиска различных методов решения задач способствуют более глубокому освоению учащимися знаний, формированию действия контроля и оценки. Анализируя варианты возможных путей решения задачи, школьники становятся соучастниками познавательного и научного поиска, Н.К. Рузин [163, с.15-80] считает, что данное умение это «общепризнанный показатель развитого мышления».

Поиск путей разными способами решить задачу иногда специально оговаривается, но учитель может и сам сделать исходное предложение, если пожелает наиболее полно проявить развивающие функции задач. Данная компетенция помогает человеку более рационально действовать в решении жизненных задач (решать жизненные проблемы).

Необходимо важным является научить учащихся составлять взаимно – обратные задачи, обобщать и конкретизировать задачу. В таких случаях происходит не только повторение и систематизация знаний учащихся, но и возникает интерес составлять новые задачи, что наводит учащихся на новый виток знаний, Н.К. Рузин [163, с.15-80]. Намечает на то, что в обучении алгебры «подобное творчество почти не встречается. Между тем в дидактическом отношении это очень полезно, при этом познается структура и идейный смысл задачи, яснее становится логика поиска решения» Толпскина Н.В. [192]. Автор утверждает, что данное умение составлять задачи «нужно расширять, усложнять задачи, а не только сводить их к подзадачам» Толпскина Н.В. [192]. В частности, важную роль играет составление взаимно обратных задач. Сама природа дидактических задач требует варьирования в смысле взаимной обратимости Толпскина Н.В. [192].

Процесс обобщения закономерностей об объекте, создает возможность перейти от рассмотрения одного частного объекта к рассмотрению такого множества объектов, в котором исходный объект является одним из составляющих, один из видов объектов [95, с.392]. Умение конкретизировать задачу состоит в нахождении более частной задачи, путем введения дополнительных видовых свойств явлений [97, с.19-30]. В пособии [213, с.58] говорится, что владение данными умениями «позволяет открывать новые объекты в математике, их определение, алгоритмы, правила, теоремы».

Планирование своей деятельности заключается в осознании проблемы, постановке цели и определении этапов своей деятельности.

Д.Пойа [151] выделяет два метода составления плана:

- анализ, когда составление плана начинается с цели (неизвестного, заключения), а заканчивается заданными объектами (данными, условием);
- синтез, то есть продвижение от данных объектов по направлению к цели.

В.И. Андреев [9] указывает на то, что при составлении плана, если это важно и обязательно, следует предусмотреть и использовать взаимопомощь и взаимоконтроль, а также продумать какие приемы и средства, которые могут быть использованы. Удобно планированный процесс должен обладать определенной гибкостью, то есть возможностью определенной перестройки действий, в случае возникновения затруднения.

Бережный расход времени и средств деятельности, тесно связан с планированием деятельности, так как при планировании нужно стремиться правильно распределить время на каждый этап деятельности, уделив больше времени наиболее сложным и трудным этапам.

Анализ деятельности – это обоснованные, систематизированные выводы о результатах труда, которые охватывают следующие аспекты:

- выявление соответствия между полученными результатами и поставленными целями работы;
- вариативных возможных путей решения проблемы;
- выделение наличия (отсутствия) противоречий в рассуждении, то есть проверка правильности хода решения как гарантии правильности результата.

Результатом такого анализа является критическая оценка достигнутого. В процессе сопоставления возникает оценка того, что есть, с тем, каким оно должно быть.

Компетенция, как уже отмечалось выше, всегда проявляется в деятельности". Она может проявляться при условии глубокой личностной заинтересованности в данном виде деятельности. На практике содержанием деятельности, имеющей личностную ценность, может быть достижение конкретного результата (продукта) или способа поведения" Л.М. Лоповок [108, с.86-94]. В концентре настоящего исследования сформированность исследовательских компетенций мы прослеживаем в процессе самостоятельного решения алгебраической задачи.

Исследовательская деятельность представляет собой систему действий, объединенных единым мотивом, и, в совокупности, обеспечивающих единство достижения цели исследования.

Эта характеристика выдвигает на первый план метод получения результата.

Учебная исследовательская деятельность по логической структуре, в принципе, не отличается от научной исследовательской деятельности, хотя уровни строгости доказательств в ее процессе могут быть ниже. Учебную исследовательскую деятельность даже на этапе завершения и оформления результатов исследования допустимо осуществлять на уроке правдоподобных рассуждений, заменяя ими строгие доказательные рассуждения.

Следовательно, по некоторым особенностям психических процессов научная и учебная исследовательская деятельность не тождественны. Между ними имеется существенное различие в мотивационном аспекте. Если в научном исследовании степень сложности рассматриваемой проблемы известна и исследователь не имеет уверенности в возможности получения им какого-либо нового результата. В учебной исследовательской деятельности учащиеся заведомо знают о разрешимости задач в посильном для них получении результата. Поэтому в учебной исследовательской деятельности имеется дополнительный стимул (мотив) - желание получить моральное удовлетворение и эстетическое наслаждение от решения задачи, уверенность в возможности достижения цели его исследования, что не всегда имеет место в научном исследовании.

С точки зрения методической науки, существенным отличием учебной исследовательской деятельности является то, что она происходит под управлением учителя. Особенности диктует основное главное противоречие, которое должно быть разрешено при составлении системы рекомендации по методике формирования исследовательских компетенций. С одной стороны, чтобы деятельность ученика была исследовательской, т. е. творческой, он должен действовать самостоятельно, а не по предписанию, с другой позиции процесса обучения (а не стихийное самообучение) предшествует управлению учеником со стороны учителя.

Для разрешения этого противоречия важно определить роль исследовательской деятельности при изучении математике обладает очень необходимое значение:

-во-первых, в связи с математизацией знания и проникновением математических методов исследования практически во все области науки, техники и производства, не измеримо возросла потребность в подготовке людей, не только обладающих некоторой системой знаний основ математики, но и компетенцией их применять, причем в неизвестной заранее ситуации. Поэтому владение элементарными исследовательскими компетенциями математического характера необходимо для обеспечения подготовки к творческому труду в широкой сфере деятельности;

-во-вторых, учебная деятельность учащихся связанная с использованием математическим средств, встречается не только при изучении курса математики, но и в процессе изучения предметов естественнонаучного цикла. Поэтому исследовательские компетенции, полученные в курсе математике, неизбежно оказывают положительное влияние на характер всей учебной деятельности.

Что касается роли исследовательской деятельности в обучении математике, то огромное значение этой деятельности следует почти непосредственно из целей обучения математики. Так, С. И. Шварцбур [215] и В.В Фирсов [231] целью общего математического образования считают повышение уровня математического развития учащихся, под которым понимают расширение объема усвоенной математической культуры и увлечение глубины этого усвоения.

Данное в указанной работе раскрытие понятия математической культуры, в частности, выделение умений, являющихся ее элементами, например, умения выделять существенные стороны исследуемой проблемы; умение анализировать полноту имеющихся данных; видение соразмерность компонентов задачи; умение проверить корректность постановки задачи; умение иначе сформулировать задачу; знакомство с языками различных математических модели; умение переходить от общих утверждений к их частным случаям; умение организовать полный и сокращенный перебор; умение выбрать наиболее подходящие методы решения данной задачи; способность производить разбиение задач на подзадачи; умение устанавливает аналогию и др. показывает, что большинство умений, являющихся элементами математической культуры, являются важными компонентами исследовательской деятельности, поэтому обладают общекультурной ценностью. С другой стороны, очевидно также, что системы компонентов исследовательской деятельности образуют один из важнейших факторов математической культуры и потому формирование исследовательских компетенций является необходимым условием достижения целей математического образования. Этим и определяется та роль, которую следует отводить исследовательской работе в процессе обучения математики.

Из субъективного характера творческой деятельности следует субъективность исследовательской деятельности, впрочем этот субъективный условный характер ярко проявляется в учебной исследовательской деятельности; учебная деятельность, направленная на получение одного и того же результата для одного ученика, может быть исследовательской а для другого - нет или в один момент для данного учащегося конкретная деятельность может быть исследовательской, а в другой - нет. Отсюда следует два важных вывода:

1. Так как формирование исследовательской деятельности отличается от нетворческой не по результату, а по методу получения результата, то в решении проблемы основное значение имеет не содержание, а методы обучения; важно не столь чему обучаются ученики, сколько как они обучаются.

2. Так как вопрос о виде учебной деятельности (исследовательская или нет) не может быть решен без учета субъекта (ученика) который в нее

включается, то при разработке методики формирования исследовательских компетенций особое значение имеет дифференцированный подход.

Отметим еще одну важную черту учебной исследовательской деятельности (т. е. исследовательской деятельности в процессе обучения). По мере обучения новое для ученика знание усваивается и перестает быть новым, причем, это относится не только к отдельным фактам, но и к методам, способом их получения.

Отсюда следует еще один вывод, на первый взгляд, противоречащий первому, а на деле его дополняющий, а именно утверждение о большей важности для развития исследовательских компетенций методов обучения по сравнению с содержанием, не означает, что безразлично, какое содержание отбирать. Отмеченная выше особенность учебной исследовательской деятельности показывает, в частности, что решение таких задач, которые быстро выводят на алгоритмический путь мало эффективно для формирования исследовательских компетенций. Это подтверждает целесообразность выбора в настоящем исследовании в качестве объекта курс алгебры 7-9 классов, так как теоретическая часть курса доказательств алгебраических утверждений также неизбежно демонстрирует учащимся применение тех же методов, которые они должны будут приминать при решении задач.

§ 1.2.Исследовательские компетенции учащихся и возможности их формирование в процессе обучения алгебре 7-9 классов

Реализация исследовательского подхода в образовательном процессе и методики организации исследовательской деятельности в этом процессе, позволяет учащимся боле качественно осваивать учебный материал. Основами могут бить алгоритмы, средствами и приемы учебно-исследовательской деятельности.

Причина внедрения значимости знания продиктовано в ряде теоретика – методологических основ; исследовательские компетенции учебного характера являются отношением школьников к реальности, способам деятельности, приемам интеграции предметных знаний; не совпадение мира знаний с миром образования, с миром науки, техники с миром жизни, а находиться на их пересечение, на их границах (В.П.Зинченко [74, с.3-16]) – то есть, представляет собой отражение в сознании учащегося реальности, «живое знание», которое строиться самим учеником?

В исследование любого явления (система) встает очень важная задача выяснить, из каких дискретных, относительно самостоятельных единиц, состояний, связей, зависимостей, взаимодействий, изменений складывается его качественная природа и каким образом, исходя из этих характеристик, можно сформулировать утверждения, объясняющие и предсказывающие поведение этого явления (система) в тех или иных зафиксированных условиях. Эта задача решается, прежде всего, при помощи анализа особого метода исследования. Цель этого метода - выделить и изучить такие, «исходные клетки», в которых, в конечном итоге, определяют поведение явления (система).

Основное применение анализа, как метода научного исследования в процессе исследовательской деятельности, является умение выделять составные части задачи, умение разбивать задачи на подзадачи. Исследователю сплошь и рядом приходиться при решении исходной задачи выделять такое множество подзадач, как правило, более простых, по сравнению с исходной задачей, чтобы решение некоторого определенного подмножество этих подзадач содержало в себе решение исходных задач.

Всякое исследование необходимо предполагает расчленение исходной проблемы, рассмотрение отдельных частей её решений частных задач, приближающих к цели. Все это создает благоприятные в начале составления предварительного плана исследований, который потом относительно от данных исследования частей плана, будет корректироваться, изменяться и постепенно приближаться к необходимой последовательности условий. Все это предполагает разбиение исходной задачи. Разбиение исходной задачи на подзадачи предполагает расчленение и дифференциацию содержания задачи, выделение и классификации её разнообразных специфических характеристик.

Приводим примеры.

Задача 1. Тракторная бригада вспахала за 3 дня 250 га. В первый день она вспахала 36 % , во второй-34% всей площади. Какую площадь бригада вспахала в третий день?

Данная задача предполагает решение следующих подзадач:

1. Какую площадь вспахала за 3 дня? (по условию 250)
2. Какую площадь вспахала за I и II дни вместе?
3. Какую площадь вспахала за I и день?
4. Какую площадь вспахала за II день?

Задача 2. При каких значениях, а оба корня уравнения $x^2 - 2ax + 4 = 0$ (1) положительны?

Решение. Для того, чтобы оба корня (1) были положительны, нужно: - во-первых, чтобы (1) имело два корня, а для этого, как известно, необходимо, чтобы дискриминант уравнения был неотрицательный; - во-вторых, так как свободный член (1) положительный, то оба корня имеют одинаковые знаки, а поэтому, чтобы они имели знак «плюс», нужно, чтобы коэффициент среднего члена был отрицательный.

Следовательно, разбив требование задачи на указанные две части, мы разбиваем и саму задачу на две более простые задачи.

1.При каких значениях a дискриминант уравнения (1) неотрицательный?

Д=$a^2 - 4 \geq 0,$ *отсюда* $a \geq ,2$ *либо* $a \leq -2$ (2)

2.При каких значениях a коэффициент среднего члена уравнения (1) отрицательный?

$$-2a < 0, \qquad \textit{отсюда } a > 0.$$

Сопоставляя (2) и (3), получаем окончательно: $a \geq 2$. При этих значениях a оба корня (1) будет положительный.

Задача 3. Решить уравнения: $x^{12} - x^9 + x^8 - x^5 + 1 = 0$.

Используя сведения исходной задачи на подзадачи, решаем задачу.

Рассматриваем решение уравнения в следующих промежутках:

1) $x < 0$. Левая часть уравнения положительна, поэтому в этом промежутке нет решений.

2) $0 \leq x < 1$. Преобразуем уравнение: $x^{12} + x^8(1 - x) + (1 - x^5) = 0$.

Все слагаемые левой части положительны, поэтому нет решений.

3) $x \geq 1$. Преобразуем выражение так: $x^9(x^3 - 1) + x^5(x^3 - 1) + 1 = 0$. уравнение не имеет решений.

Процесс разбиение задач на подзадачи можно провести при изучении свойства функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. После преобразования функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ к виду $f(x) = a(x + n)^2 + m$, тогда этом опирается на следующие подзадачи:

1) Свойства функции $f(x) = a(x + n)^2$;
2) $f(x) = ax^2 + c$. Эти подзадачи расчленить можно на следующие;
3) $f(x) = ax^2$
4) $f(x) = c$.

Этот процесс можно граф – схемой изобразить следующим образом.

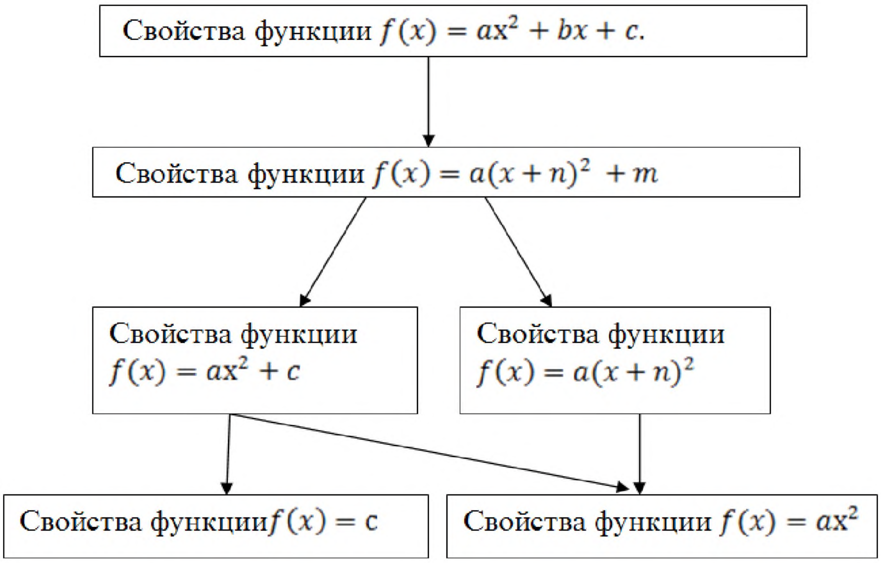


Рис.1.

Задача 4. Разложить $x^4 + 4$ (1) на множители (Алгебра для 7 класса). Для того, чтобы решить данную задачу надо решить следующие подзадачи.

Решение данной задачи можно подвести к решению следующих подзадач: 1.Складываем и вышиваем к данному многочлену (1) выражение $4x^2 - 4x^2$ равное нулю от этого значение (1) не изменится, получим

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 (2)$$

2.Преобразуем (2) следующим образом:

$$x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 \ (3)$$

Это действие осуществлено на основании переместительного и сочетательного закона сложения.

3.Используем формулу квадратов, суммы к выражению, стоящему в скобках в правой части (3), получим:

$$(x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2, (4)$$

4.Преставим $4x^2$ как $(2x)^2$, тогда имеем:

$$(x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \ , (5)$$

5.Применяя формулу разности квадратов к правой части (5) и получим:

$$(x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x), (6)$$

Сравниваем полученные все равенства на основе свойства транзитивности, если *а*=*в* и *в*=*с*, то *а*=*с*, получим окончательно:

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \ (7)$$

Задача 5. При каких значениях к корням уравнения x^2+2 (к -3) х+9=0 находятся в промежутке (-6;1)?

Требование этой задачи очень сложное. Попытаемся разбить его на более простые требования.

Следовательно, если корни квадратного уравнения находятся в каком–нибудь промежутке, то они должны существовать вообще в области действительных чисел. А для этого дискриминант D должен быть неотрицательным. Это первая часть требования.

Действительно, коэффициент старшего члена уравнения равен 1, тогда он положительный, поэтому значения функции $f(x) = x^2 + 2(k-3)x + 9$ в точках $x = -6$ и $x = 1$ является больше нуля, что легко усмотреть, если построить параболу график этой функции.

Наконец вершины параболы должны находиться между корнями.

Таким образом, данную задачу можно разбить на систему следующих подзадач:

1.Д$\geq 0; (k-3)^2 - 9 \geq 0$

2.f(-6)$> 0; 36 - 12\,(k-3) + 9 > 0$

3.f(1)$> 0; 1 + 2(k-3) + 9 > 0$

4.-6$< -\frac{в}{a} < 1; -6 < 3 - k < 1.$

В результате получаем:$6 < k < 6\frac{3}{4}$

Задача. 6.. Поострить график функции:

$$y = \frac{|1x+1|}{x+1} + \frac{2x-1}{|x-1|} - |x| * x \ (1)$$

Решение. Сразу построить график этой функции не удастся.

Попробуем разбить эту задачу на части - более простые задачи, рассматривая заданную функцию в таких промежутках изменения x, в которых график функции легко построить. Так как в выражение (1) входят модули $|x+1|, |x-1|$и$|x|$, то, естественно, рассмотреть те промежутки, в которых значения этих модулей определенные. Очевидно, что для этого надо выделить точки, в которых эти модули меняют свое значение. Этими точками являются числа -1,1 и 0. Поэтому рассмотрим четыре промежутка x < -1; $-1 < x \leq 0$; $0 < x < 1$и x$>$ 1.Тем самым наша задача разбивается на 4 более простые задачи.

1. Построить график функции (1) промежутке $x < -1$, в этом промежутке $y = \frac{-(x+1)}{x+1} + \frac{x-1}{-(x-1)} - x * (-x) = -2 + x^2$.График этой функции, мы знаем, как строить, это будет часть параболы A B (Рис…)

2.Построить график функции (1) в промежутке - 1$< x \leq 0$. В этом промежутке $y = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x-1}{-(x-1)} - x * (-x) = x^2$. Графиком будет часть параболы ОС.

3. Построить график (1) в промежутке 0$< x < 1$

В этом промежутке у $y = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x-1}{-(x-1)} - x * (-x) = -x^2$. Графиком будить часть параболы ОД.

4.Построить график функции (1) промежутке $x > 1$

В этом промежутке у $y = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x-1}{-(x-1)} - x * (-x) = 2 - x^2$. Графиком будет часть параболы E F

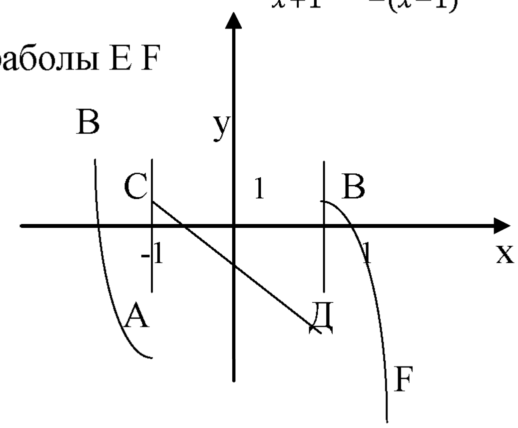


Рис.2

Иногда для одной задачи может существовать несколько сведений, применимых к ней. Применение различных операторов порождает альтернативное множество подзадач. Некоторые из этих подзадач могут оказаться неразрешимыми. В таком случае приходится перепробовать несколько операторов.

Например, решая задачу 7 «Данный многочлен $b^3 + ba^2 + 2b + 1$ разложите его на множители, используя различные приемы группировки (операции сведения), мы получаем различные подзадачи:

1)$(b^3 + 2b^2) + (2b + 1)$

2)$(b^3 + 2b^2) + (2b + 1)$

3)$(b^3 + 1) + (2b^2 + 2b)$

4)$(b^3 + b^2) + (b^2 + 2b + 1)$

Две первые, из которых не разрешены, а две остальные определяют две способа решения.

Операциями сведения задач к подзадачам являются, как правило, теоретические утверждения, выражающие закономерности той предметной области, которой принадлежат объекты, фигурирующие в условиях задачи.

Например, задача 8. ≪ *Найдите* производную суммы функции $\sum_{i=1}^{n}$ fi(x) которую можно свести к подзадачам». Найти производную функции fi(x) (1$\leq i \leq n$) и операциям сведения служит известная теорема: ≪ *производной* суммы равна сумма производной этих функции»

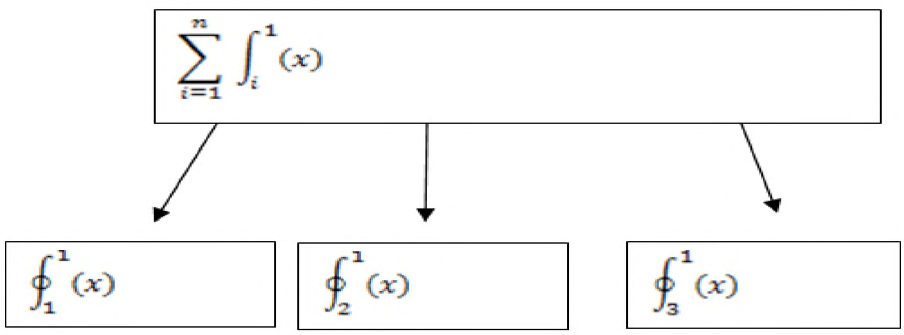


Рис.3.

Задача 9. Решите уравнения: $5x^2+5y^2+8xy+2y+2-2x=0$. Это можно свести к трем подзадачи; оператором является метод группировок одночленов в сумме.

Рис.4.

Сведения задачи к альтернативным множествам подзадач удобно наглядно изобразить в виде граф - схемы особого вида.

Если, например, для решения задачи A достаточно решить подзадачи B, C и D или подзадачи E и F, задачу G, то можно изобразить эту структуру с помощью граф - схемы, на которой вершины изображают задача (подзадачи).

Вершины B, C, Д изображают одно множество подзадач, решение которых обеспечивает решение A, вершины E и F–другое, а вершина G-третье. Стрелки, идущие к вершинам, изображающие подзадачи одного множества, соединены дугой. (Рис.5).

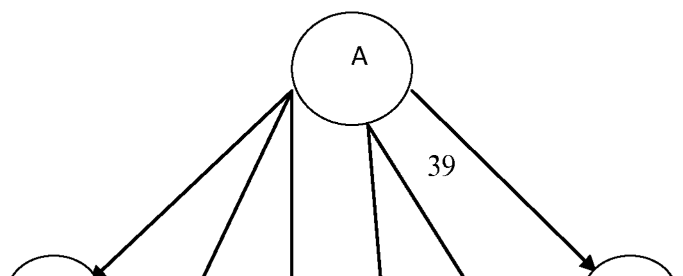


Рис.5

Каждые множества верны $\{B,C,Д\},\{E,F\}$, состоящие более чем из одной вершины, имеют родительскую вершину и сводятся к промежуточным вершинам (подзадачи), как это сделано на рис.6.

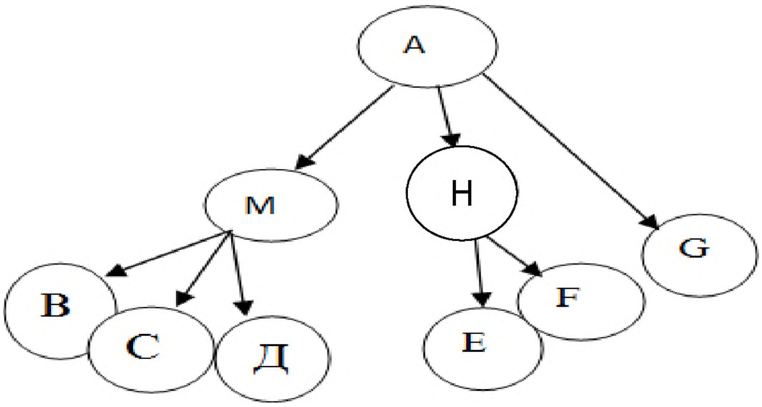


рис.6.

Так как для решения задачи A достаточно решить одну из подзадач M или H или G, вершины M, H, G называют $\ll$ *или* $\gg$ вершинами графа.

Так как для решения задачи M (а, следовательно, A) необходимо и достаточно решить подзадачи B и C и Д, вершины B, C, Д называют $\ll$и$\gg$вершинами. Аналогично вершины E и F являются $\ll$ *и* $\gg$ вершинами. Графы подобные изображенным на рис .6 называют $\ll$ *и\или* $\gg$ графами.

Введением промежуточных вершин $\{M,H\}$, мы получили следующее свойство $\ll$ *и\или* $\gg$ граф; если какая–нибудь вершина имеет дочерние, вершины, то они все одного сорта, либо все – $\ll$ *и* $\gg$ вершины либо все «или» вершимы.

В частном случае когда «и» вершины вовсе нет мы получаем обычный граф, который мы использовали для изображения поиска в пространстве состояний.

Пример $\ll$ *и/или* $\gg$ *граф для задачи.*

Задача 10. Найдите все действительные корни уравнения

$$\sqrt[2]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$$

Можно наметить две основные стратегии поиска решения задачи:

1)Преобразование данного иррационального уравнения в рациональное.

2) Преобразование данного иррационального уравнения в систему рационального уравнения введением вспомогательными неизвестными.

Здесь уже значительно сокращен объем поиска благодаря применению эвристики надо попытаться выразить $\ll И^4+U^4 через\, И++U \gg$ и $И.U \gg$,$\ll (И^4+U^4)\to((И+U)^2-2ИU)^2-2И^2U^2 \gg$. Если вести поиск решения в слепую, то можно получить много подзадач, не являющихся элементарными и не сводимых к другим.

На графе сведения задач к подзадачам вершины, соответствующие элементарным задачам, называются заключительными.

Цель процесса поиска на $\ll и\backslash или \gg$графе показать, что начальная вершина разрешима. Что это означает? Разрешимость вершины на «и\или» графе можно определить рекурсивно следующим образом.

1) Заключительные вершины разрешимы (так как они изображают элементарные задачи).

2) Если у вершины A_i, не являющейся заключительной, непосредственно, следующие за ней вершины являются «или» вершинами ($A_i\to A_{i1}$ или $A_{i2\ldots}A_{in}$), то она разрешима тогда и только тогда, разрешима, по крайнем мере, одна из этих вершин.

3) Если у вершины A_i, не являющейся заключительной, непосредственно следующие за ней вершины являются «и» вершинами

($A_i \to A_{i1}$ и A_{i2} ...), то она разрешима, тогда и только тогда, когда разрешима каждая из этих вершин.

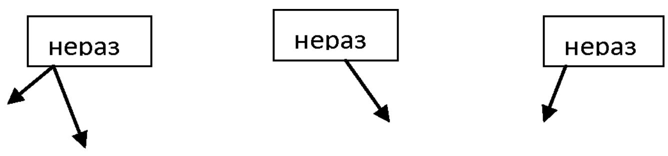
В таком случае решающий граф определяется как подграф из разрешимых вершин, включающий начальную.

Если построим решающий граф, то это означает, что задача сведена к элементарным подзадачам.

Если у некоторых вершин «и\или» графа, не являющейся заключительной, нет следующий за ней вершины (т.е. соответствующий задачам не являющихся элементарными, не сводима к другим), то такая вершина 6 называется неразрешимой, и её называют также тупиковой.

Определение не разрешимости вершин можно получить с помощью трёх пунктов определения разрешимости:

1) Всякая тупиковая вершина неразрешима.
2) Если у вершины, не являющейся тупиковой, непосредственно следующие за ней вершины, являются «или» вершинами, то она неразрешима тогда и только тогда, когда неразрешима каждая из этих вершин;
3) Если у вершины, не являющейся тупиковой, непосредственно следующие за ней вершены, являются «и» вершинами, то она неразрешима тогда и только тогда, когда неразрешима, по крайне мере одна этих вершин.



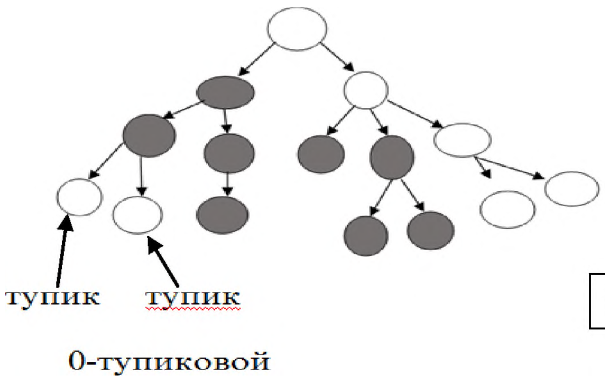


Рис.7

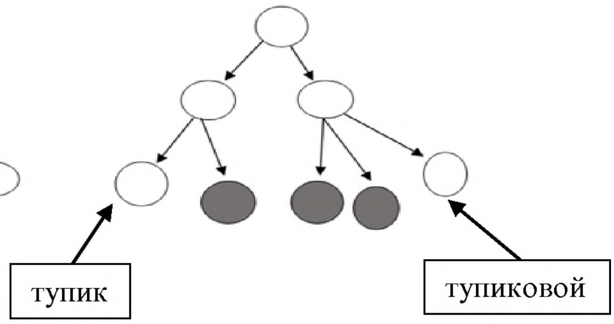


Рис.8

Процедура определения разрешимости или неразрешимости начальной вершины (исходной задачи, с помощью полученных подзадач) осуществляется продвижением снизу- вверх по графу. В реальной практике решения задачи эта процедура выполняется, как правило, в уме. Но это обязательный элемент процесса решения задачи. Доведя разбиение исходной задачи на подзадачи до элементарных задач, мы должны убедиться «обратным ходом» в разрешимости исходной задачи.

Выше уже было отмечено, что частным случаем «и\или» графа является граф, используемый для поиска в пространстве состояний, состоящий из одних «или» вершин.

Другим частным случаем «и/или» графа является граф, состоящий из одной «и» вершины. Примером может служить граф сведения к подзадаче. Задачи: «10». Найдите производную функцию $f(x) = sinx + \ln(e^x + x2.tgx.$

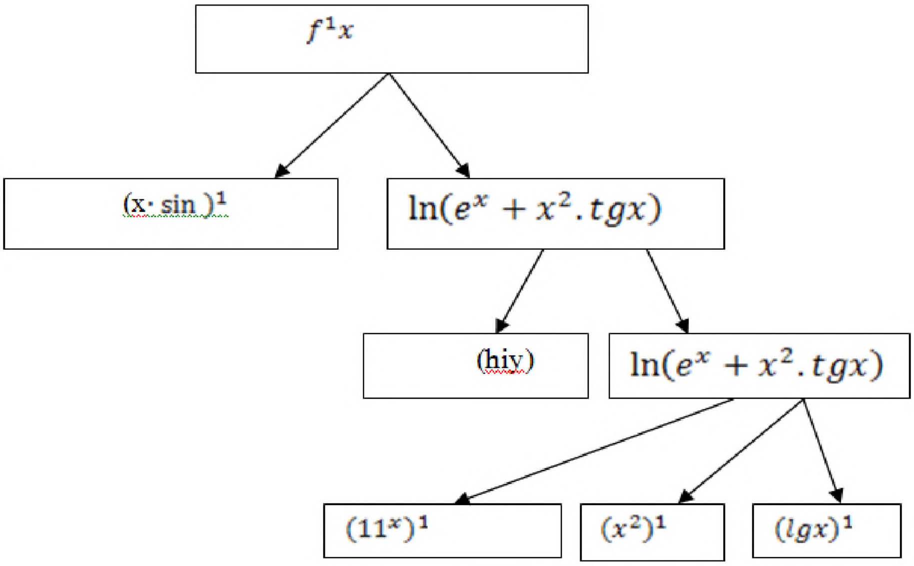


Рис.9

Важная черта исследовательской деятельности состоит из видения структуры объекта, подлежащего исследованию. Суть видения структуры объекта заключается в быстром, подчас много векторном охвате его частей в их соотнесении друг с другом, в выявлении взаимосвязей элементов объекта, которые придают ему целостность и тем самим порождают новые свойства, не сводящихся к свойствам составляющих его элементов. Поскольку именно структура объекта является носительницей его упорядоченности, она способна раскрыть тайну его целостности, пока эта тайна не раскрыта, объект остается в нашем представлении просто конгломератом обнаруженных в нем элементов.

Большое значение в выявлении структуры объекта имеет сравнение его с другим, каким- то отношением ему близким, для обнаружения их структурного сходства. Это направление выявления структуры имеет эвристическое значение, помогая выявлению законов организации объектов исследования, которые до этого оказывались неуловимыми. Полное структурное сходство внешне различных систем получил точное математическое описание с помощью понятия изоморфизма, играющего фундаментальную роль в современной математике.

В процессе исследовательской деятельности большую роль играют такие элементы математической культуры, как: умение по-другому формулировать проблему; выделять существенные стороны исследуемой системы; видеть в разных по форме ситуациях единое математическое содержании; (сущность); обобщать задачу; видеть в данной задаче частного случая другой; умение видеть аналогию задач, метода, объектов, понятий и пользоваться ее и т.п.

В основе всех этих умений лежит общий прием деятельности - исследовательской деятельности, состоящей в установлении структурного сходства внешние различных систем (или короче, обнаружение, усмотрение, видение сходства).

Всякое исследование предусматривает внимание исследователя к своему знанию и опыту. На основе недетермированности исследовательский деятельности она предусматривает поиск путей для достижения цели. В процессе этого поиска исследователь обязательно опирается на свои знания и опыт. И такой подход происходит в виде распознавания в нынешних ситуациях, ситуации ему известно, подобной и удобной для видения результатов исследования, а это распознавание ситуации и есть ни что иное, как видение за различной формой единоверной математической моделью, единого математического содержание (видение структурного сходство). Следовательно, видение структурного сходства внешне различных систем (задач) является одним из важных методов в процессе исследовательской деятельности.

Одним из важнейших этапов исследовательской деятельности высокого уровня является этапом формализации, на котором исследователь строит с помощью математических средств модели исходной ситуации. Правильно утверждается «объект М является моделью объекта А относительно некоторой системы S характеристики (свойств), если М строится (или выбирается) для имитации А по этим характеристикам. Модель может быть построена для изучения указанных характеристик (исследовательская модель)» Блехман И.И. [21]. Модель исходной ситуации способна замещать исследуемую ситуацию так, что изучение её дает новую информацию об исходной ситуации. Иначе говоря, математическая модель исходной ситуации (системы) есть не, что иное, как схожая с ней по структуре новая система.

Замена реальной ситуации, которую необходимо исследовать, к построению соответствующей или тождественной ее математической модели, включает в себя выявление в исследуемой ситуации существенных для нее сторон, подбор удобных для построения математической модели и формулировка на язык этой модели, математической задачи, отражающей исследуемые вопросы, относящиеся к ситуации. Однако формирование основных представлений о математическом моделировании, прежде всего, связываем с содержанием, богатым приложениям или ориентированным на решение прикладных задач.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 11.Можно ли увезти 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374кг,….466 кг на семи трехтонках?

Построение математической модели требует глубокого проникновения в сущность задачи, выделения существенных её сторон. Важно уяснить, что камни не могут дробиться, они должны рассматриваться как единое целое. Поэтому надо считаться с тем, что на каждой машине должно быть целое камней. Отсюда следует, то существенной стороной, помимо общего веса камней, является их количество. Таким образом, математической моделью этой задачи будет следующая: Имеется 50 чисел образующих арифметическую прогрессию с первым членом 370 и разности 2. Требуется разбить эти числа на семь групп так, чтобы сумма чисел каждой из групп не превосходила 3000. Эта модель, очевидно, совпадает по структуре с ситуацией, предложенной в задаче. Построение ее требует умение видеть структурное сходство ситуации. Так многие школьники, решая приведенную задачу, неправильно строили ее математическую модель, неверно интерпретировали ее. Они не учитывали требование класть на машину целое число камней, не замечали существенности этого условия, что говорит об их не глубоком проникновении в суть задачи, неумении выделять существенные элементы задачи и видеть связи между ними. Их модель выглядела следующим образом: имеется 50 чисел-370, 372, 374,….466,468. И вопрос задачи понимали так, менее или больше сумма этих чисел. Чем 3000х7?. Такая модель по структуре не совпадает с ситуацией исходной задачи, т.к. она говорит о том, что у учащихся необходимо развивать видение структурного сходства с ситуацией.

Таким образом, этап формализации исследовательской деятельности предпочитает необходимость видения сходства структур, системы, ситуации.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 12. Можно ли разменять 25сом. На односомонные три сомона и пяти сомонные купюры так, чтобы получить все 10 купюр?

Построение математической модели требует вникать в сущность задачи, выделения существенных её сторон. Важно уяснить, что сомоны (1,2,3) не могут разменять на монеты, они должны быть целыми. Поэтому считать, что каждый размен должен быть целыми купюрами. Отсюда следует, что существенные стороны являются целыми купюрами.

$e + m + k = 10$

$e + 3m + 5k = 25$

Потому математическая модель в данной ситуации совпадает с самой ситуацией. Отсюда $2m + 4k = 15$.Так как $2m + 4k$ является четным, а 15 нечетным. Потому нельзя разменять.

Мы будем называть две математические задачи схожими по структуре, если между существенными элементами их можно установить соответствие так, что все основные связи между существенными элементами одной из них сохраняются между соответствующими элементами другой. В этом случае, очевидно, решение одной из задач соответствующим образом переносится на другую. Часто, говоря о классе однотипных математических задач, имеют в виду множество сходных по структуре математических задач, умение видеть структурное сходство математических задач в процессе исследовательской деятельности для пере формулировки исходной математических задач, с целью усмотрения в ней известной математических задач или частного случая другой более общей математической задачи или подзадачи.

Компетенции усмотреть и уловить сходства в ситуации часто создает удобную возможность исходной задачи, решение которой представляется довольно трудными, переформулировать иначе (т.е. составить задачу схожую по структуре с исходной) после чего решение исходной задачи становится достаточно прозрачным, а то и вовсе тривиальным.

Приведем пример.

Задача 13.Однажды утром как раз в тот момент, когда взошло солнце, турист начал восхождение на высокую гору. Узкая тропа вилась серпантином по склону горы к её вершине. Турист шел по дорожке с разной скоростью и часто останавливался, чтобы отдохнуть и поесть. На вершину горы он попал через два дня. Отдохнув несколько дней, турист пустился в обратный путь по той же тропе и в то же самое время. Требуется доказать, что на тропе найдется плавная точка, которую турист во время спуска и во время подъема в одно и то же время суток.

Действительно, решение, этой задачи найти не так просто. Но сформулируем эту задачу иначе. Пусть в одно и тоже время, по тропе идут два человека: один из них поднимается вверх, а второй опускается вниз. Доказать, что на тропе найдется точка, в которой они будут находиться в одно и тоже время суток. В силу того они обязательно встретятся, решение этой задачи очевидно, но данная задача по своей структуре совпадает с исходной. Как видим, при таком подходе (иначе сформулированная задача) неясный путь в начале, путь решения задачи сразу становится очевидным.

Решение многих задач основано на цепочке переходов от одной данной задачи к задачам схожим по структуре, до тех пор, пока последняя в этой цепочке не будет известной или тривиальной. Доказательство многих утверждений метода от противного предполагает, допустив противное, цепочку исходной, ситуации к ситуации предоставляет собой набор схожих по структуре ситуаций. Во всех этих случаях необходимо обнаружить сходства задач, которое опять–таки предполагает видение основных элементов задачи их взаимосвязи.

Приводим в качестве примера следующую задачу.

Задача 14. Доказать, что $A=\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^5}{24}$ являются целыми числам при любом четном n.

Используем методы переформулировки задачи. Отталкиваемся от данных: Так как п – четное число т.е.n=2к, то

$$A=\frac{2k}{12}+\frac{4k^2}{8}+\frac{8k^3}{24}=\frac{k}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k^3}{3}=\frac{k+3k^2+2k^3}{6}$$

От искомого «Чтобы доказать, что А – целое число, достаточно доказать, что числитель полученной дроби делится на 6».

Формулируя вспомогательную задачу: Доказать, что $B=k+3k^2+2k^3$ делится на 6 при любом целом k’’

Для этого разложим В на множители:

В=$k(1+3k+2k^2)=k(1+k+2k+2k^2)=k(k+1)(1+2k)$.

От искомого. «Чтобы доказать, что В делится на 6, достаточно доказать, что В делится на 2 и на 3».

От известных: Так как из двух последовательных целых чисел k и k+1 одно четное, то В делится на 2’’.

От искомого: «Остается доказать, что В делится на 3. Формулируем еще одну вспомогательную задачу: Доказать, что $B=k(k+1)(1+2k)$ делится на 3 при любом целом к».

Решаем эту задачу методом полной индукции:

1) $K=3m$

2) $K = 3m + 1,$ *тогда* $B = (3m + 1)\ (3m + 2)\ (6m + 3)$

3) $K = 3m + 2,$ *тогда* $B = (3m + 2)\ (3m + 3)\ (6m + 5)$

Так как возможны всего три случая и в каждом из них В делится на 3, то задача решена. Следовательно, В делится на 6 и А – целое число при любом четном n.

Задача 14. Решить уравнение $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97 - x} = 5$. Очевидно, это данную задачу разбить на какие–то части невозможно. Значит, надо как-то преобразовать данное уравнение. Применим метод замены переменных.

Обозначим $x = y^4, a\ 97 - x = z^4$ (1). Тогда наше уравнение переходит в такое : y+z=5 (2), а сложив полученные равенства (1), получим еще одно уравнение $y^4 + z^4 = 97$ (3). Уравнение (2) и (3) образуют систему уравнений с двумя неизвестными y и z заменяющую данное уравнение.

Решим эту систему уравнений

Так как нам известна сумма $y + z$, то возникает идея найти производную $y + z = t$ (4).

Для этого возвысим обе части (2) в квадрат, получим: $y^2 + z^2 + 2t = 25$ или $y^2 + z^2 = 25 - 2t$. Возвысим это равенство почтенно снова в квадрат, получим: $y^4 + z^4 + 2t^2 = 625 - 100t + 4t^2$. Сравнивая с уравнением (3) получаем после несложных преобразований квадратное уравнение относительно $t^2 - 50t + 264 = 0$

Решив это уравнение, найдем два значения $t_1 = 6$ и $t_2 = 44$. В совокупности с уравнением (2) получаем две системы уравнений относительно y и t

$$\begin{cases} y + z = \\ y \cdot z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z = 5 \\ y \cdot z = 44 \end{cases}$$

Первая система имеет два решения: $y_1 = 2$; $z_1 = 3$ или $y_2 = 3$; $z_2 = 2$. Тогда из первого равенства (1) находим два значения $x_1 = 16$ и $x_2 = 81$.

Вторая система уравнений решения в области действительных чисел не имеет.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 15. Сократите следующие дроби:

$$а)\frac{\sqrt{a^2}-1}{\sqrt[3]{a}-1};\quad б)\ \frac{в-\sqrt[3]{в}}{\sqrt[3]{в}-1};\qquad в)\frac{\sqrt[4]{ав^3}+\sqrt[4]{a^3в}}{\sqrt{a}+\sqrt{в}}\ ;$$

Задача 16 (общая задача). Упростите выражения:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ав^3}+\sqrt[4]{a^3в}}{\sqrt{a}+\sqrt{в}}+\frac{1-\sqrt{ав}}{\sqrt[4]{ав}}\right):\left(\frac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a+1}}\right)$$

При решении обобщения задачи опираются на прежний опыт, следовательно, используется прежнее решение задачи: Переводим следующие задачи:

Задачи 15 а) На станцию привезли 420т угля в вагонах вместимостью по 15т, по 20т и по 25т. Сколько вагонов было использовано, если известно, что всего было 27 вагонов?

Задача 15 б) В строительный магазин привезли 420т цемента. В машинах вместимостью по 15т, по 20т и по 25т. Сколько машин было использовано, если известно, что всего было 27 машин?

Задача 15 в) В хозяйство привезли 420 голов коров в вагонах вместимостью по 15 голов, по 20 голов. Сколько вагонов было использовано, если всего было 27 вагонов?

Очевидно, что, несмотря на различное внешнее оформление (формул), эти задачи по своей математической сущности друг от друг ничем не отличаются.

В силу системы уравнения $\begin{cases} x+y+z=27 \\ 15x+20y+25z=420 \end{cases}$, задачи 16а, 16б, 16в сходны по структуре и решение любой из них дает решение другой. Важность видеть схожесть задач, которые определяются частым использованием этого элемента исследовательских компетенций.

Математика изобилует «играми», не имеющими, на первый взгляд, ничего общего между собой, но в действительности представляющими собой лишь различные наборы символов и правил для игры в одну и ту же игру. Например, как показывает великое открытие Декарта, аналитическую геометрию, алгебру и геометрию можно рассматривать как по существу тоже действенные, но внешне различные объекты: предметы.

История математикой науки знает немало примеров структурной связи двух, независимых, и оказалось бы, очень непохожих друг на друга проблем. Таковыми являются проблемы раскраски карт и топологическая теорема Эйлера, о многогранниках, проблема совершенных чисел и простых чисел Меерсона и многое другое. В школьном курсе математики нам очень часто приходится сталкиваться со схожими задачами ситуациями. Как правило, всегда, когда нам приходиться применять аппарат данной теории в другой, идея изоморфизма служит основой для этого применения, и в большинстве случаев остается не выявленной для учащихся (а иногда и для учителя не замечающего, что используется идея изоморфизма). Так процесс решения уравнений и неравенств состоит в преобразовании данной высказанной формы в другие высказанные формы, ей эквивалентные, при изучении функции изоморфизм проявляется в том, что одна и та же функциональная зависимость отражает разные процессы жизни: все возможные геометрические интерпретации, графики, графы - есть ни что иное, как графические модели, совпадающие по структуре с исходными системами .

В процессе исследовательской деятельности очень важно бывает усмотреть пригодность известного метода при решении неизвестной задачи.

Эти компетенции мы также относим к умению видеть сходство методов.

Такие возможности иллюстрации множества исследовательских компетенций при обучении алгебре в 7-9 классах очень много.

Теперь рассмотрим состав и структуру, умственное действие составляющего процесса разбиение задач на подзадачи и установление структурного сходства внешне различных систем (задач).

1. При рассмотрении умственного действия, состоящего в установлении структурного сходства внешне различных систем, необходимо учитывать, что степень сходства структур систем (задач) может быть различна, могут встречаться системы структуры, которых изоморфны (совпадают полностью), а могут быть системы голоморфные по структуре (совпадающие частично). Во всех случаях учителю необходимо обратить внимание на то, каким образом во внешне различных системах было обнаружено структурное сходство, какими соображениями пользуются при выдвижении гипотезы, о структурном сходстве или различии рассматриваемых систем, какие мыслительные операции выполняются при этом.

2. При рассмотрении мыслительной операции выделения существенных элементов задачи, лежащей в основе умственных действий по разбиению задач на подзадачи и установление структурного сходства, важно подчеркнуть относительность понятия «существенный элемент задачи», то при иной постановке вопроса, существенные элементы могут переходить в несущественные элементы и наоборот, отсутствие критериев для определения «существенности» элементов задачи, зависимость свойства существенности не только от самой ситуации, сколько от постановки вопроса, от цели исследования. Примером задачи, подтверждающей сказанное, может являться известная задача - шутка типа «задачи Швейка».

Задача 17. У одной женщины была три сына. Между ней и соседкой, по желавший узнать возраст ее сыновей, произошел следующий диалог:

-Сколько лет каждому из твоих сыновей?

-Произведение чисел, равных возрасту моих сыновей, равно 36.

-Ну и что?

-Сумма их лет равна числу окон вот в этом доме.

-Ну и что?

-Да, а старший - то рыжий?

-А теперь мне все ясно! Спасибо!

Сколько лет каждому из сыновей?

Вопрос о нахождении существенных элементов этой задачи значительно затруднен. Пусть числа x, y $и$ z означают возраст сыновей. Нетрудно увидеть, что условия

а) x, y $и$ z – целые числа и

б) x, y, z-36 являются существенными.

Труднее установить, какие условия, из второго и третьего ответа женщины, являются существенными. Анализируя второй ответ женщины, возникает вопрос о существенности условий, вытыкаемых из него. Что здесь существенно? То, что бы изменилось, если бы были не окна соседнего дома, а деревья, растущие возле него или номер автобуса, проезжающего мимо? Очевидно, что окна здесь не при чём. Существенным является знание соседки о сумме числа лет сыновей на этом момент. А, что является существенным в третьем ответе женщины? То, что старший сын - рыжий, или же то, что есть старший? По-видимому, цвет волос не играет никакой роли, а вот то, что среди сыновей имеется старший - существенно. И последнее, не так просто усмотреть, что существенным является условие о том, что после первого и второго ответа соседка не обладала информацией, приводящей к однозначному ответу.

Таким образом, существенным элементом этой задачи являются следующие условия:

а)$x, y, и$ –целые числа

б)x, y, z=36

в)среди чисел x, y $и$ z имеется одно наибольшее:

г)после второго ответа женщины соседка знает, чему равна сумма $x + y + z$

д) после первого и второго ответа женщины соседка обладала информацией, которая не позволила дать однозначного ответа на вопрос задачи.

Подобные примеры отражают существо указанных замечаний и в качестве иллюстрации были бы полезны учащимся.

3.При разбиении задач на подзадачи необходимо подчеркнуть учащимся о возможности дробления задачи на всё более мелкие подзадачи, о практической неограниченности процесса. Но прекращается процесс дробления по достижению подзадач, решение которых учащимся хорошо известно. Опишем процесс разбиения задач на единичные подзадачи. В качестве языка описания мы воспользуемся языком блок-схемы. При этом, несмотря на то, что мы пользуемся языком описания алгоритмов. Следует отметить, что мы приводим не алгоритм указанного процесса, что в противном случае противоречило бы нашим собственным утверждениям о его недетерминированности, а описываем этот процесс, используя предписания алгоритмического характера. Так как некоторые блоки, которые мы используем при описании, представляют собой недетерминированное указание (свойства недетерминированности процесса), в силу чего подобные описания не обладают и свойствами результативности (не всегда приводит к получению результата).

Предварительно введем необходимую терминологию и обозначения.

I. Понятия задачи. Множество понятий задачи будем обозначить через П. Оно представляет собой объединение двух множеств.

1. множество В=$\{в_1, в_2, \dots \dots \dots вn\}$базовых понятий задачи

2. множество Т=$\{t_1, t_2, t_3 \dots \dots \dots t_k\}$текущих понятий задачи, то есть П=BUT.

II. Элементы задачи. Множество всех элементов задачи будем обозначать через W, при этом оно представляет собой объединение следующих трех множеств: 1) множество элементов задач, попадающих под базовые понятия задачи, при этом U=$\bigcup_{i=1}^{n} U_i$, где U_i -множество элементов попадающих под базовое понятие $в_i$; 2) множество элементов, попадающих под текущие понятия задачи при этом $V = \bigvee_{j=1}^{k} V_j$ где V_j -множество элементов попадающих под текущие понятия ti.

3.Множество Q элементов задач, которые представляют собой утверждения подзадач, основанных на выявленных связях между элементами множества U∪ V. Таким образом, W=UUVUQ.

Если множество $\bar{P}$ есть множество элементов задачи, то через P мы будем обозначать подмножество существенных элементов из P,m,e, $\bar{u}_i \subset N_i$; $\bar{V}_j \subset V_j$; $\bar{Q} \subset Q$, $\bar{W} \subset W$ при этом имеют место следующие соотношения, $\bar{U} = \bigcup_{i=1}^{n} U_i, \bar{V} = \bigvee_{j=1}^{k} V_j$, $\bar{W} = \bar{И} \cup \bar{V} \cup \bar{Q}$.

III. Связи между существенными элементами задачи, множество существенных связей между элементами задачи представляют собой подмножество множества $\bar{S}=\{\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots \dots \dots \bar{S}_r\}$ всех связей между элементами множества $\bar{W}$.

IV. Подзадача. Задача обнаружения связи S_r между соответствующими элементами исходной задачи из W представляет собой единичную подзадачу q_r. Таким образом, подзадача формируется следующим образом: «Показать, что имеет место S_r». Множества всех подзадач будем обозначать через Q=$\{q_1, q_2 \dots \dots .., q_\tau\}$, а множество существенных подзадач, соответственно, через $\bar{Q} \subset Q$.

V. Непротиворечивость. Система подзадач Q=$\{q_1, q_2 \dots \dots .., q_{\tau \dots\dots}\}$ называется противоречивой, если среди нее соответствующей системы связей $\bar{S}=\{\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots \dots \dots \bar{S}_r\}$ существуют хотя бы две взаимоисключающие связи. В противном случае система называется непротиворечивой.

VI. Полнота. Система подзадач Q называется полной, если она содержит решение (результат) исходной задачи.

2. Умственные действия, состоящие в установлении структурного сходства систем, задач, ситуации могут быть представлены более мелкими, единичными мыслительными операциями. Все эти операции мы разбиваем:

1) Мыслительные операции, связанные с выявлением существенных элементов задачи.

2) Мыслительные операции, связанные с выявлением основных связей между существенными элементами задач.

3) Мыслительные операции, связанные с установлением соответствия между существенными элементами задач и обнаружением соответствия между их связями.

Блок - схема процесса установления структурного сходства задач будет выглядеть следующим образом. Блок проверки выполнения условия П. П означает проверку выполнения следующего условия: Из того, что между элементами $W_{l_1}^{(1)},\ W_{l_2}^{(1)}, \dots \dots W_{l_p}^{(1)}$ из $\overline{W}$ существует связь $\bar{S}_e^{(1)}$ из S_i следует, что между элементами $W_{l_1}^{(2)},\ W_{l_2}^{(2)}, \dots \dots W_{l_p}^{(2)}$ из $\overline{W_2}$ существует связь $\overline{S_e^{(2)}}$ из $\bar{S}_2$, где $W_{l_i}^{(1)} \overset{\Phi_i\,(1)}{\Longleftrightarrow} W_{2_2}^{(1)}$ (для всех i=1,2…P} и $\bar{S}_e^{(1)} \overset{\varphi_j}{\Leftrightarrow} \bar{S}_e^{(2)}$.

Таким образом, для установления структурного сходства систем (задач) необходимо выделять множество их существенных элементов $\overline{W_1}$ и $\overline{W_2}$ и основных связей $\overline{W_\iota}$ и $\overline{W_\iota}$, после чего среди всевозможных соответствий между элементами множеств $\overline{W_1}$,$\overline{W_2}$ и основные связи $S_1\ и\ S_2$ после чего среди всевозможных соответствий элементам множеств W_1, W_2 и $S_1\ и\ S_2$ и S_e имеется такое, для которого выполняются следующие условия П:

Из того что, между элементами $W_{l_1}^{(1)},\ W_{l_2}^{(1)}, \dots \dots\ W_{l_p}^{(1)}$ существует связь $\overline{S_\iota} из\ \overline{S_2}$ следует, что между соответствующими элементами $W_{l_1}^{(1)}, W_{l_2}^{(1)}, \dots\ W_{l_p}^{(1)}$, имеется связь $\bar{S}_1 \subset \bar{S}_2$ можно сделать вывод о сходстве структур рассматриваемых систем (задач), а при отсутствии - о их различии.

В качестве примера покажем сходства структур следующих задач.

Задача 17 а) В математическом конкурсе каждую задачу правильно решило 5 человек, и каждой участник правильно решил 5 задач. Доказать, что можно организовать разбор задач так, что каждый участник конкурса будет разбирать равно одной из решенных им задачи и все задачи будут разобраны.

Задача 17 б) Дана таблица П х П, в которой написаны неотрицательные числа, причем сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равна 1. Показать, что из каждой строки можно выбрать по одному числу так, чтобы: - во- первых, все находились в разных столбцах; а, -во- вторых, все они были не сменные.

$$P_\pi = \begin{cases} \frac{\pi}{(\pi+1)^2} \\ \frac{\pi}{\pi(\pi+1)} \end{cases} \text{если } \pi \text{ нечетно, если } \pi \text{ четно}$$

1. Выделяем существенные элементы приведенных задач.

а) Существенными элементами задачи в) являются: участники олимпиады, предложенные задачи и их решения, среди которых могут быть так правильные, так и неправильные. Пусть в конкурсе принимало участие п человек: $A_1, A_2, \ldots\ldots A_п$ и из условия ясно, что всего задач было предложено также $п_1, B_1, B_2, \ldots\ldots B_п$ Далее решение задачи B_j участникам A_i обозначим через C_{ij}, причем C_{ij} может принимать только два значения «истина» и «ложно» таким образом $\overline{W_a} = \{A_1, A_2, \ldots\ldots A_п;\ B_1, B_2, \ldots B_п, C_{i1}, C_{i2}, \ldots., C_{in}\}$

б) Существенными элементами задачи б) являются: строки и столбцы, таблицы, соответственно $a_1, a_2, \ldots\ldots a_п$ и $b_1, b_2, \ldots b_п$ и элементы таблицы – неотрицательные числа C_{ij} (число, стоящее на пересечении j- ой строки и j-того столбца). $W = \{A_1, A_2, \ldots\ldots A_п;\ B_1, B_2, \ldots B_п, C_{i1}, C_{i2}, \ldots., C_{пп}\}$.

2.Выявим основные связи $\overline{S_a}$ и $\overline{S_b}$ между существенными элементами задачи а) и б)

В задаче а) существенной связью является то, что каждый участник правильно решил 5 задач и наоборот, каждую задачу решило равно 5 человек. В наших обозначенных это означает, что среди элементов каждой из строк A_j (j=1,2,3,……., п) $-\ C_{jj}, C_{2j}, \ldots., C_{jп}$ из каждого равно 5 из столбцов $B_j(i = 1,2,3, \ldots, П) - C_{i1}, C_{i2}, \ldots\ C_{in}$ принимают значение, «истина». Положим для определенности $C_{ii} = 1/5$ если его значении – элементами задачи, а) $-C_{ij}$можно будет записать в таком виде:

$$\bar{S}_a = \left\{\overline{S_1^{(1)}}, \overline{S_2^{(1)}}\right\} \text{ где } S_1^{(1)} < (\forall_i = 1,2,3 \ldots\ldots \pi); \ \sum_{j=1}^{n} C_{ij} = 1 >$$

и *S2(1)<∀j=1,2,3*... ... *πj=1nCij=1>.*

б) Существеннее связи б) в самом условии задачи и могут быть записаны аналогично связями задачи а):

$$\bar{S}_a = \left\{\overline{S_1^{(1)}}, \overline{S_2^{(1)}}\right\} \text{ где } S_2^{(2)} < (\forall_i = 1,2,3 \ldots\ldots \pi) \sum_{j=1}^{n} C_{ij} = 1 \text{ и } S_2^{(2)} < (\forall_i = 1,2,3 \ldots\ldots \pi) \sum_{j=1}^{n} C_{ij} = 1 >$$

для наглядности существеннее элементы и основные связи между ними для задач а) и б) выписаны соответственно в таблица I и II соответствии Ф $C_{ij} \overset{\Phi}{\Leftrightarrow} C_{ij}$ (при котором каждому элементу таблицы (задачи , а) – C_{ij} ставится в соответствие аналогичных элементов таблицы II (задачи б) C_{ij} удовлетворяет условиям, что и доказывает структурное сходство рассмотренных задач таким образом, нами установлено что задачи, а) и б) сходны по структуре.

Точно таким же образом можно доказать сходство структур любой пары из приведенных задач и следующих.

Задача. в) Квадрат разбит на 100 равновеликих частей двумя способами. Доказать, что можно выбрать 100 точек так, чтобы в каждой части первого разбиения и в каждой части второго было ровно по одной точке.

Задача г) Квадрат со стороной 1 разбит двумя способами на 100 ровно всяких частей. Доказать, что существует 100 многоугольников, площадь каждого и которых не мнение 0,000001 такие, что в каждого (и которых не мнение) части первого разбиения и в каждой части второго разбиения находится равно по одному многоугольнику.

Задача д) Каждый член бригады садоводов собрал по100 яблок. Эти яблоки уложены в корзины по 100 яблок в каждой корзине. Доказать, что можно так распределить эти яблоки между садоводами, что каждому достанется корзина, в которой есть некоторое количество яблок, собранных ими самими.

Следует отметить, что отношение «быть схожими по структуре» заданное на множестве систем (задач) обладает свойством транзитивности т.е. из того, что пару задач $(A_1 \text{и} A_2)$ и $(A_1 \text{и} A_3)$ сходные по структуре следует сходству структуре задач A_2 и A_3.

Анализ приведенных выше возможностей приводит нас к тому, что можно выделить следующие единичные исследовательских компетенции в процессе обучения алгебре 7-9 классов средних школ.

1.Выделить понятия задачи.

2.Выделить существенные элементы задачи.

3. Выявить связи между существенными элементами задачи.

4.Установить связи между частями задачи (процесс решения задачи)

5.Оценивать полноту и непротиворечивость связей (подзадачи)

6.Построить граф – схемы процесса решения задачи.

Выводы по первой главе

1. Компетенция рассматривается как совокупность взаимосвязанных качеств личности (знания, умения, навыки, способы деятельности), необходимых для качественной продуктивной выполнений деятельности: компетентность определяется как обладание компетенции.

2. Проведенное исследование показало, что исследовательские компетенции сводимы к совокупности исследовательских умений, так как в отличие от последних именно несколько составляющих, мотивы деятельности умения ориентироваться в источниках информации необходимы для осуществления определенных видов деятельности; теоретические и практические знания, необходимы для выбора путей решения проблемы. Сделан вывод о том, что учащиеся могут овладеть исследовательскими компетенциями лишь при самостоятельном решении

проблем (задачи), постановке задач и поиске знаний, необходимые для их решения.

3.Исследовательские компетенции учащихся формируются и развиваются в процессе целесообразной организации их учебно-исследовательской деятельности при изучении алгебры в 7-9 классах средней школы.

4.На основе деятельности и подходе выделены исследовательские компетенции и возможности их формирования в процессе обучения алгебре в 7-9 классах средней школы.

5.Наивысшая степень сформированных исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения в 7-9 классах является самостоятельное решение алгебраических задач.

Глава 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ 7 – 9 КЛАССОВ

& 2.1. Методика формирования исследовательских компетенции учащихся в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов

На современном этапе развития образовательного процесса в Республике Таджикистан постепенно реализуется личностно – ориентированный подход в организации учебно – воспитательной работы в школе. Однако в учебно – воспитательных мероприятиях по обучению математике все нагляднее заметна недостаточная работа по формированию исследовательских компетенции учащихся. Учителя – практики объясняют это состояние тем, что они в полной мере владеют методами формирования исследовательских компетенций учащихся. Оказывается, что используемые ими учебники не имеют возможности организовать эту работу, так как система задач практически не содержит задачи исследовательского характера. Исходя из этого, нам видится необходимым осветить вопросы методики формирования исследовательских компетенций у учащихся посредством обычного учебного процесса в школе.

Основным компонентом методической системы обучения математике в школе являются цели обучения и вытекающие из них основные задачи курса математики. Анализ нормативно – правовых документов [методических источников] показывает, что развитие творчества в них связывается с формированием исследовательских компетенций, являющихся составной частью интеллектуальных компетенций. Отсюда следует, что формирование рассматриваемых компетенций должно стать одной из главных задач курса математики основной школы. Однако школьными программами по математике такая задача явно не предусмотрена. Формирование исследовательских компетенций в процессе обучения математике влияет на развитие общих компетенции и определяет перспективу развитию интеллекта личности, а значит, решение этой проблемы является одной из основных процессов обучении математике. Вместе с тем, в период обучения математике решение этой методической проблемы, не стало решающей стратегией обучения. Напротив, формирование исследовательских компетенции учащихся в учебном процессе стало необязательным, а иногда и полностью игнорируемым учителями. Таким образом, оказалось, что конкретно проблемой формирования у подрастающего поколения исследовательских компетенции на уроках алгебры 7 – 9 классов не занимается ни практика обучения, ни теория обучения и воспитания алгебре в 7 – 9 классах.

В подтверждение сказанному, автору необходимо было рассмотреть многих действующих и альтернативных учебников по алгебре для средней школы и научно – методических источников по проблеме исследования, что свидетельствует о недостаточном количестве системы задач и теоретического материала, направленного на формирование исследовательских компетенций учеников.

Выдающимися учеными (А. М. Матюшкин [120], Я. А. Пономарев [163], Л. М. Фридман[214], Д. Пойа [161] и др.) разработана система эвристических приемов организации исследовательской деятельности, полный анализ о которых дал Ильясов И.И. [81]. Как отмечает В. И. Андреев [10], что организация учебно – исследовательской деятельности связана с реализацией эвристических приемов в обучении.

Методист и математик Пойа [161] подчеркивает, что прилагательное эвристический – значит служащий для открытия. Согласно мнению этого учёного, под способом деятельности понимается как система действий, выполняемых в исследовательской деятельности и решении учебных задач.

Придерживаясь мнения В.И. Андреева [10] под эвристическим приемом понимается совокупность действий, позволяющая учащимся продуктивно осуществлять исследовательскую деятельность.

На этапе выработке компетенций на основе его осознания формируются умения. Умения, входящие в состав исследовательских компетенций деятельностного компонента, относятся к обобщенным умения, так как они обеспечивают «переносимость» усвоенных компетенций на широкий круг новых задач. В соответствии с рассмотренными в предыдущей главе различными типами заданиями по алгебре в 7-9 классах, направленных на формирование исследовательских компетенций, мы разработали соответствующие эвристические приемы.

Любые компетенции формируются и развиваются при целесообразной и систематической организации соответствующей деятельности. Поэтому формирование исследовательских компетенций формируются при целенаправленной организации учебно – исследовательской деятельности в процессе обучения алгебре в 7 -9 классах основной школы.

Правильная организация учебно – исследовательской деятельности при решении задачи определенного вида дает возможность оценить уровень сформированной исследовательской компетенции. Реализация эвристических приемов организации формирования соответствующей теории поэтапного их формирования (П. Я. Гальперин [47],О. Б. Епишева [69]).

Опишем методические основы формирования исследовательских компетенций в процессе обучения алгебре в 7 – 9 классах:

1) начальное ознакомление учащихся с мыслительными операциями протекает в процессе изучения определенного теоретического материала по алгебре;

2) в следующем этапе формирования компетенций необходимо применять мыслительные приемы, связанные с использованием определенного приема (метода) при обучении, новые приемы или решения

задачи, и при этом использованный прием (метод) не требовал бы лишней траты времени и облегчил школьнику учебную деятельность в поиске новых знаний;

3) выбор того или иного приема (метода) в дальнейшем начинается с напоминания учителем о том, что метод им знаком, ранее использовался и учащиеся поэтому стремятся выделить особенности ранее изученной темы (решенной задачи), благодаря которым принимается решение о целесообразности применения именно выделенного приема (метода);

4) следующий этап – это применение различных методов в сочетании и во всевозможных комбинациях друг с другом;

5) и, в конечном счёте, формируются навыки самостоятельного выбора и использование уже знакомых мыслительных приемов (методов).

Следовательно, когда ученик слышит от товарища какое–то утверждение, но учитель принуждает вспомнить всем о приеме соотнесения, т.е. ученик не должен сразу верить слову товарища, а попытаться проверить, действительно ли утверждение истинно. Соотнесение продиктовано множеством вопросов: «Поэтому?», «На каком основании?» Для иного, чтобы убедиться в истинности утверждении учитель предлагает школьникам применять метод преобразования.

Иногда часто в учебно – исследовательской деятельности применяются действия (метод) сравнения. Постоянно сравнивая новые полученные знания с уже ранее известными, восстанавливается их сходство и различие. При повторении и актуализации знаний, ученик должен подтвердить свои ответы примерами или контр примерами, что создает основу саморазвития школьника в учебно – исследовательскую деятельность, прием конкретизации. Для поддержания активных поисковых действий учитель может применять также прием стимулирования.

Названные вещие действия (методы) создают для учителю возможность управлять процессом формирования исследовательских компетенций. Для управления в качестве средства используются целесообразные задания, напоминаются соответствующие методы, наиболее подходящие на данный момент. Данное задание симулирует усилия школьника, целенаправленные перспективы развития мышления.

В математической учебной деятельности при особом рассмотрении и анализе задач особое внимание направлено на формирование действия составления и обобщения задач. Потому в методике преподавания математике в средней школе, применяя метод варьирования некоторыми исходными данными задачи, получают новые задачи. Основой для этого процесса являются основные (открытые, ключевые) задачи.

Разрабатываемые различные структурные свойства видов системы упражнений, направлены на формирование исследовательских компетенций с позиции операционного состава.

Система упражнений направлена на формирование исследовательских компетенций с позиции операционного состава.

Элементы задач могут быть связаны между собой каким–либо соответствием, закономерностей, утверждением определением, теоремой, следствием. На первом этапе формирования умений установления связей между элементами задачи и их свойствами, входящими в состав исследовательских компетенций операционного состава, рекомендуется применять задачи, следующие существующим формулировкам:

- выделение существенных свойств понятий и соответствий между ними;
- восстановление связи данного понятия с другими понятиями;
- ознакомление с фактами, отраженными в формулировках теорем и их доказательств;
- обобщение утверждений, закономерностей и теоремы;
- составление и обратные утверждения, закономерностей теорем и их истинности;
- выделение частных случаев известных утверждений правила, определения в математике и нахождение закономерности;

- кавитацию математических объектов и отношений между ними;
- решение задач несколькими способами;
- составление контр примеров;
- составление новых задач;
- выявление связей между элементами задач и т. д.

Мы рассматриваем учебно – исследовательские задания, взяв в качестве примера, тему «Квадратные уравнения».

1. Организация постоянного перевода содержания изучаемых в теме словесных определений на язык соответствующих образов.

2. Выделение существенных признаков понятий «квадратные уравнение», «квадратичная функция», «неравенство второй степени», а также признаков частных видов данных понятий. Установление иерархических связей с системе изучаемых признаков.

3. Установление логических, в частности, родовидовых связей внутри понятий темы с такими понятиями, как «отношение», «график уравнения», «многочлен», и т. д., а также с соответствующими понятиями геометрии, физики, черчения и других областей знания. Перестройка, ранее усвоенных учащимся, понятий в связи с вновь вводимыми.

4. Формирование исследовательских компетенций путем выработки умений анализировать, сравнивать, обобщать предъявляемый материал, составлять и решать взаимно-обратные задачи, планировать стратегию мыслительной деятельности и т. д.

5. Организация связи понятий «квадратные уравнения» с содержанием конкретного предметного опыта учащихся (проведения графических лабораторных работ, привлечение внимания к примерам, иллюстрирующим необходимость данной темы, ее практические предложения и т. д.).

Эти пять возможностей можно конкретизировать через систему заданий, содержание которых отражает полноту знаний о природе квадратных уравнений, а логическая структура обеспечивает активизацию системы важнейших компонентов в структуре понятийного мышления. Приведем некоторые примеры таких комплексов.

Конкретизацию первого из перечисленных возможностей обеспечивают задания: оперирование пространственными образами; образная интерпретация заданной словесной или символической записи; перестраивание образов в соответствии с приемами расчленяющих абстракций, направленных на выработку умений формулировать вопрос к задаче, поставленной в наглядно-графической форме; составление задач на основе предъявленного чертежа, способствующего формированию словесно-речевой активности. Задания этой системы могут быть, например, такими.

Рис. 1.

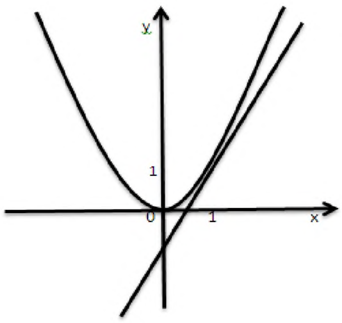
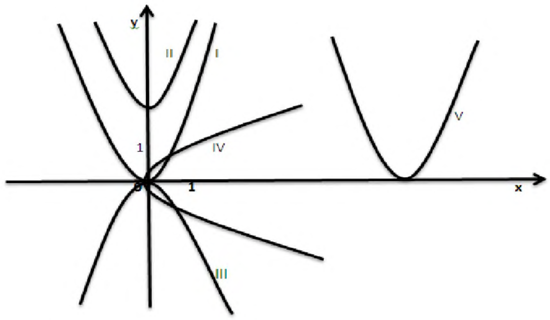


Рис. 2.



«На рисунке дан график функции, заданной уравнением $=ax^2$.

Пользуясь графиком, определите значение a». Аналогичные задания формулируются для функций $y=ax^2+b$ *(найдите aи b)*, $y = ax^2 + bx + c$ (найдите a, b, c). «На рисунке дано графическое решение квадратного уравнения. Ознакомившись с рисунком, ответьте на вопросы: Сколько вариантов имеет это уравнение? Какие знаки имеют его корни? Каков его дискриминант?». Эти задания связаны с выяснением отдельных свойств графика, с уточнением положения фигуры и положения фигуры на плоскости приводят к постановке заданий, формирующих умение читать чертеж в целом. Например: «Составьте рассказ о квадратном уравнении и его корнях, исходя из графического решения этого уравнения, показанного на чертеже» (рис. 1).

«На рисунке 2 даны графики конгруэнтных парабол. Укажите, какими перемещениями можно отобразить параболу 1 на параболы II, III, IV, V». При выполнении этого задания необходимо оперировать образами, непосредственно представленными на чертеже. Следующий шаг включает обязательное мысленное оперирование известными пространственными образами: «Как из графика функции $y = 2x^2 + 4x + 6$ получить график функции $y = x^2 + 2x + 3$; из графика функции $y = 2x^2 + 4x + 6$– график функции $y = -2x^2 + 4x + 6$?». Дальнейшие задания формируют умение самостоятельно конструировать образы: «Составьте задачу, решение которой приводит к уравнению $x^2 - (x - 4)^2 = 20$», «Начертите график функции $x = (y - 3)^2$».

Такие задания, как «Отметьте на числовой прямой корни квадратного уравнения $3x^2 - 6x - 2 = 0$», «Переведите на язык графика предложение: дан график квадратичной функции, у которой $a > 0$, $D > 0$, или график квадратичной функции пересекает ось абсцисса в точках (-3; 0) и (-2; 0)», обучают нахождению образов, соответствующих данной словесно-символической записи. Их развитие – задания, требования которых, предполагают необходимость подключения образной интерпретации. Например, «Докажите графически, что уравнение $x^2 - 5x + 10 = 0$ не имеет решения» или «Задачу 863 (а) из учебника алгебры для VII класса можно решить с помощью уравнения $\frac{720}{x}$? $\frac{720}{x+10}$?».

Умения перестраивать образы в соответствии с приемами расчленяющей абстракции вырабатываются, -во–первых, с помощью заданий по выделению и обобщению существенных и несущественных свойств объекта. Вот одно такое задание: «Выберите из перечисленных ниже вопросов те ответы, которые понадобятся при решении неравенства второй степени с одной переменной. Каков знак Коэффициента а?

Коэффициента b? Коэффициента с Дискриминанта D? Куда направлены ветви параболы? Пересекает ли парабола ось абсцисса? Ось ордината? Как найти координаты точек пересечения параболы с осью 0х? осью 0у? Каковы координаты вершины параболы? Имеет ли функция $y=ax^2+bx+c$ минимальное (максимальное) значения? Каково примерное расположение ее графика? При таких значениях переменной x функция убывает? Возрастает? Принимают значения большие поля? Равные нулю? Как выделить квадрат двучлена?» Эти же умения вырабатываются, -во вторых, с помощью заданий, требующих обобщенных знаний о существенных и несущественных признаках данных объектов, например таких: «Даны функции $y = x^2 - x + 3, y = x^2 - 2x + 1, y = -x^2 - 2x + 1, y = -x^2 + 2x + 1,$ $y = -x^2 - 2x - 1$. График, какой из них, изображен на рис. 3?».

На выработку умений формулировать вопрос к задаче или составлять задачу, на основе чертежа направлено, например,

Рис. 3

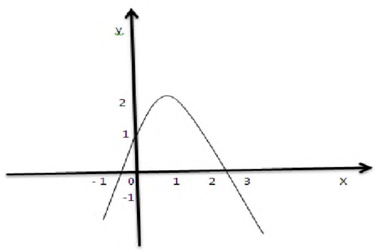
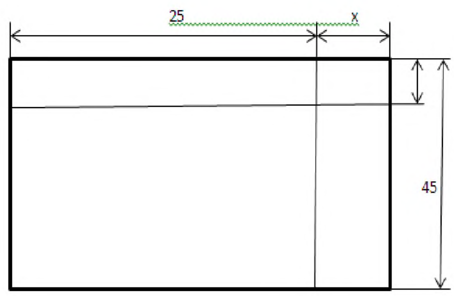


рис. 4



Следующее задание: «На уроке учитель прочел задачу, а ученик кратко записал ее условие, как это показано на рисунке 4. Восстановить по этой записи условие задачи».

Формированию словесно – речевой активности служат задания на чтение формул («Прочтите – опишите словесно – следующие формулы: $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; ax^2+bx+c=a и т. д.»); по обучению составления плана ответа («Составьте план ответа на вопрос: «Что я знаю о квадратном уравнении?»… «Теорема Виета»); на составление письменного или устного рассказа («Напишите сочинение на тему: «Квадратное уравнение и его роль в изучении окружающей действительности», «Проведите экскурсию по следующим уравнениям: $x^2 + 9x - 22 = 0$, $3y^2 + 2y - 5 = 0, 5 - 12x + 9x^2 = 0, x^4 - 2x^2 + 1 = 0, 5x^2 + 45 = 0$, $3x^2 + 6x^2(5 - 0{,}5x) = 2, x^2 + 14x + 33 = 0$, «Расскажите, как следует решать неравенство второй степени»).

Система заданий, способствующих выполнению второй возможности (организации в сознании учащихся признаков понятий) состоит из заданий, формирующих умения устанавливать наличие или отсутствие у данного предмета известного признака заданий по сравнению двух данных объектов, заданий, способствующих развитию умений выявлять необходимые и достаточные признаки понятий, зданий, формирующих умение выделять в системе признаков частные и общие задания, развивающие умение выбирать из совокупности признаков те, которые необходимы для решения данной задачи.

Ограничимся примерами заданий на выявление необходимых и достаточных, признаков. Ими могут, быть задания с неполным составом условия («Об уравнении известно, что оно имеет два корня. Можно ли утверждать, что оно обязательно, является квадратным?»). Полезны и задания с избыточным составом условия («О функции, заданной уравнением $y = ax^2 + bx - c$, известно, что $a > 0$ и $\mathrm{D} > 0$. Достаточно ли этих сведений, чтобы ответить на вопрос о числе решений соответствующего уравнения $ax^2 + bx + c$=0? О решении неравенства $ax^2 + bx + c >$а, $ax^2 + bx + c < 0$?»).

Система, способствующая решению третьей из поставленных в начале целой, включает в себя три группы заданий.

а) Задания, формирующие умение устанавливать родовидовые связи между различными понятиями. С помощью этих заданий выполняется анализ соответствующих определений, формул, алгоритмов. Например, «Пусть А - множество всех функций, заданных уравнением $y = ax^2$, В –

множество всех функций, заданных уравнением $y = ax^2 + c$, С-множество всех функций, заданных уравнением $y = ax^2 + bx$, D - множество всех функций, заданных уравнением у= $ax^2 + bx + c$. Какая теоретико множественная связь существует между этими множествами?».

«Как, исходя из формулы корней уравнения $ax^2 - bx + c - 0$ (где а=0) получить формулу для решения уравнений вида $ax^2 + c$=0, $ax^2 + bx = 0$? К этой же группе относятся задания, позволяющие осознать воздействие родовых обобщений на организацию видовых понятий, например, «Решите уравнение $2x^2 - 4x - 6x - 8$. Запишите все свойства уравнений, которые позволяли вам переходить от одного уравнения к равносильному», «Какие способы задания функции вы знаете? Опишите способы, которыми можно задать функцию $y = -3x^2 + 5$».

b) Задания, формирующие умения видеть многосторонние связи квадратного уравнения с другими понятиями.

К ним, в частности, относятся задания, способствующие осознанию связи между решением квадратного уравнения и разложением на множители соответствующего квадратного трехчлена. Приведем некоторые примеры таких заданий.

«Используя общую формулу корней квадратного уравнения, решите следующие уравнения:$x^2 - 3x + 2 = 0$; $-x^2 + 2x - 1 = 0$; $3x^2 + 4x + 5 - 0$; $4x^2 - 25 - 0$. Запишите, если возможно, левую часть этих уравнений в виде произведения множителей», «Какая связь существует между решением уравнения $ax^2 + bx + c$=0. и разложением на множители квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$? Приведите примеры», и. т. д.

Следует остановить внимание учащихся на связях между квадратным уравнением $ax^2 + bx + c$ и квадратичной функцией у-$ax2 + bx + c$.

Действительно, эта связь может быть установлена через перевод учащимся самой задачи о решении квадратного уравнения на функциональный язык. Этого можно достичь в ходе выполнения, например, такого комплекса заданий: «При каких значениях переменной x значение трёхчлена (x^2-2x-8; a)j обращается в нуль, б) равно 7; -10. Не строя графиков функций; заданных уравнениями $y=2x$ и $y=x2+1$, скажите: имеют ли эти графики точки пересечения? –Если да, то укажите их» «Движение двух автомобилей по шоссе задано уравнениями x_1-21-0, $2t^2$, $x2=80-4t$; Укажите время встречи автомобилей» «Что общего в решении приведенных задач»? Придумайте сами подобные задачи».

Кроме того, в качестве обязательных должны фигурировать задания на установление связей между отдельными свойствами квадратного уравнения и квадратичной функции.

И наконец, в итоге, следует предложить учащимся ряд заданий, при выполнении которых в сознании учащихся объединялись бы всевозможные изученные ими между понятийные связи. Укажем некоторые из них: «О графике квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ известно, что он пересекает ось абсцисса в точке О (0; 0). Что вы можете сказать о корнях соответствующего уравнения ax^2+bx+c =0, о его коэффициентах?», «Придумайте задачу о свойствах квадратичной функции, которая привела бы к решению: а) уравнения $3x^2-6y+8-0$; б) неравенства $3x^2-6y+8>0$;» «Какие свойства квадратичной функции могут быть исследованы с помощью решения квадратных уравнений, неравенств второй степени?», «Проанализируйте следующую запись»:

$$(1)\ \left[\begin{array}{l} X_1+x_2=-1 \\ X_1+x_2=-6 \end{array}\right. \quad 1 \longleftrightarrow \qquad (x-2)(x+3)=0 \quad (2)$$

$$\Updownarrow \mathrm{I} \qquad\qquad \Updownarrow \mathrm{III}$$

$$X^2+x-6=0 \qquad\qquad (3)$$

Сформулируйте каждое из утверждений (1), (2), (3). Обоснуйте равносильность (1- III).

в) Задания, позволяющие включить данное явление в систему между предметных связей. Такие задания из курсов физики, химии и т. п. могут предлагаться на уроках алгебры и, имея алгебраический метод решения, специально включаться в содержание уроков по смежным предметам.

Четвертый, система – задания, направленные на формирование основных мыслительных операций. В нем мы выделяем задания на отыскание аналогий между объектами (аналогии «предметные» и «алгоритмические»), на выделение и обобщение различных сторон проблемной ситуации (выделение и обобщение свойств класса объектов, обобщение способов действий), на выработку умений видеть взаимно-обратные; задачи и самостоятельное составление задач по данному критерию, на формирование умения планировать стратегию своей, деятельности (как при выполнении отдельного шага в изучении данной темы, так и в целом).

Ограничимся примером заданий на отыскание «предметной» аналогии (оно было предложено до изучения графика, квадратичной функции): «В одной и той же системе координат постройте графики функций $y = 3x, y - 3x + 2(y = [x], y = [x + 2], y = [x] + 2, y = [x + 2] + 4)$. Что между ними общего, и чем они отличаются друг от друга?».

Пятая система заданий посвящена организации связи понятия «квадратное уравнение» с содержанием предметно – практического опыта учащихся. Он включает в себя следующие задания.

а) Задания на выполнение действий с объектами и анализ этих действий.

б) Задания на определение области применения данного понятия и осмысление предметной ситуации с математической точки зрения.

Приведем пример практической работы из этого комплекса.

«В одной и той же системе координаты постройте графики функций $y = 2x^2$ и $y = 2(x + 5)^2 = 4$, предварительно заполнив таблицу их значений. Какие кривые являются графиками этих функций? Найдите координаты из вершин. Как расположены графики относительно друг друга? Можно ли график одной из функций получить отображением графика другой? Если да, то, каким отображением, если нет, то почему. Составьте план построения графиков таких функций. Приведите выражение $2 \cdot (x+5)^2 = 4$ к виду $ax^2 + bx + c$ и сформулируйте алгоритм построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$».

Шестая система заданий, способствующая формированию умений, включает понятие и сведения об объекте во все новые и новые связи и отношения. Тем самым приобретенные ранее знания получают подкрепление, углубляются, обобщаются и систематизируются. Изучение нового при такой организации исследовательской деятельности сочетается с «Непрерывным», опирающимся на прежний опыт, знания и умения.

Проясним сказанное на примере. В курсе алгебры VIII класса рассматриваются различные способы разложения многочленов на множители. Покажем, как исследовательская организация предоставления многочлена в виде произведения органически вписывается в систему задачи по всему курсу алгебры в VIII классе.

Тема «Дроби». Здесь, изученные умения разложения на множители, служат постоянным «подсобным средством». В теме фактически нет задачи, в процессе решения которых не требовалось бы разложить выражение на множители тем или иным способом. Приведём несколько примеров:

1) Найдите область определения дроби $\frac{9}{2x^{2-8x}}$.

2) При каких значениях переменной значение дроби $\frac{a^2-25}{4a}$ равно нулю?

3) Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-9}{ав+3в}$; б) $\frac{y^2-9}{y^2-6y+9}$; в) $\frac{2x-2y}{4x^2-4y^2}$; г) $\frac{xy-x+y-y^2}{x^2-y^2}$

4) Найдите значение выражения $\frac{15a^2-10ав}{3ав-2в^2}$ при $a = -2$; $b = -0{,}1$.

5) Упростите выражение $\frac{a-2}{a^2+2a}$: $\frac{a}{a^2-2a} - \frac{a^2+4}{a^3-4a} - \frac{1}{a^2+2a}$.

6) Решите уравнение $\frac{y+5}{y^2-5y} - \frac{y-5}{2y^2-10y} = \frac{y+25}{2y^2-50}$.

Тема «Неравенства». Некоторые способы разложения на множители встречаются при рассмотрении примеров решения нелинейных неравенств.

7) Решите неравенство, разложив на множители многочлен, затканный в левой части: а) $2x^2 - 7x > 0$; *б)* $y^2 - 0{,}64 < 0$.

Тема «Квадратные корни». Способы разложения на множители вспоминаются в связи с преобразованием выражений, содержащих квадратные корни.

8) Сократите дробь; а) $\frac{c - \sqrt{c}}{5\sqrt{c}}$; *где* $c > 0$; б) $\frac{x-2}{\sqrt{x+\sqrt{2}}}$; *где* $x \geq 0$.

9) Решите неравенство $x^2 - 3 \geq 0$.

10) Вычислите значение выражения $\sqrt{117^2 - 108^2}$.

Тема «Квадратные уравнения» (VIII и IX классы). Здесь широко применятся известные способы разложения многочленов на множители и добавляется новый: разложение на множители квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ и $D \geq 0$, по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x2.$

11) Решите уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, разложив левую часть на множители с помощью выделения квадрата двучлена.

12) Решите уравнение $4(x+3)^2 - (x-5)^2 = 0$ двумя способами;

а) приведя его к виду $ax^2 + bx + c$=0, где $a \neq 0$;

б) разложив левую часть на множители.

13) Решите уравнение $\frac{4}{9y^2-1} - \frac{4}{3y+1} - \frac{y}{1-3y} = 0$.

14) Найдите корни многочлена;*а)* $x^3 - 4x$; *б)* $x^4 - 1$; *в)* $x^3 + 10x^2 - x - 10$.

15) Решите уравнение $x^3 - 9x = 0$.

16) Сократите дробь $\frac{в^2 - 8в + 15}{в^2 - 25}$;

17) Решите неравенство: а) $2y^2 - 7y + 6 > 0$; б) $x^2 - 10x \leq 0$.

Таким образом, способы разложения многочленов на множители с одной стороны, совершенствуются на протяжении всего курса VIII класса, а – другой - в любой момент служить необходимым «рабочим аппаратом». Такой исследовательский подход к изучению позволяет, при изучении нового материала, сконцентрировать всё внимание на незнакомом и не отвлекаться на то, чтобы постоянно опираться на прежние знания.

Итак, через систему упражнений должно формировать умение включать понятие в различные связи и логические отношения с другими понятиями.

Приведем один из возможных примеров. В курсе алгебры IX класса рассматривается понятие арифметической прогрессии. В связи этим, учащимся могут быть предложены такие задачи:

Доказать, что:

1) Арифметическая прогрессия является функцией, заданной на множестве натуральных чисел формулой вида $y = kx + b$;
2) Любая функция, заданная формулой вида $y = kx + b$, где $x \in N$, является арифметической прогрессией.
3) Таким образом, устанавливается содержательная связь между понятиями арифметической прогрессии и линейной функции: любая арифметическая прогрессия является линейной функцией, заданной на множестве натуральных чисел, и наоборот: любая линейная функции определенная на множестве натуральных чисел, является арифметической прогрессией. Значит, множество всех арифметических прогрессией и множества всех линейных функций, заданных на множестве натуральных чисел N, совпадают. Отсюда ясно, что понятию арифметической прогрессии можно дать другие определения: арифметической прогрессий называется линейная функция, определенная на множестве натуральных чисел. Седьмая система упражнений направлена на умение подмечать математические закономерности.

Широкие возможности для выработки соответствующих умений возникают при изложении нового материала. Важно организовать систематическую и целенаправленную работу по выработке компетенций замечать общее в отдельных частных примерах.

Рассмотренные произведения суммы и разности двух одночленов целесообразно предпослать выполнение следующих примеров:

$(x - 3)\,(x + 3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 3^2$

$(4 - к)\,(4 + к) = 16 + 4к - 4к - к^2 = 4^2 - к^2$

$(3в + с)\,(3в - с) = 9в^2 - 3вс + 3вс - с^2 = 9в^2 - с^2 = (3в)^2 - с^2$

Рассмотрев выражения, полученные в результате преобразований, учащиеся подмечают, что они представляют собой разность квадратов двух выражений. Затем, по заданию учителя, они сопоставляют исходные и полученные выражения, тождественные исходным. Подметив закономерность, учащиеся выражают и в виде равенства: $(а - в)\,(а + в) = а^2 - в^2$. Затем проводят доказательство.

Формирование подмечать закономерности следует не только при изучении нового учебного материала, но и при выполнении ряда отдельных упражнений. Приведем некоторые примеры таких упражнений:

1) Дано выражение с переменными: $3{,}5x^2 - 1{,}75x + 2$. Найдите значение этих выражения при $x = 2$. Как, используя полученный результат, найти значение выражения $7x^2 - 3{,}5x + 4$ при $x = 2$?

2) Вычислите 1^2; 11^2; 111^2; 1111^2. Не вычисляя, запишите, чему равно 11111^2. Свою догадку проверьте вычислением.

3) Найдите формулу общего члена конечной последовательности:

а) $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11$ ...

б) $1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 51$ ...

в) $1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;$ ...

г) $1;\ 8;\ 27;\ 64;\ 125;$ ...

д) $0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}000;$ ...

е) $-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;$ ...

Рассмотрите таблицу:

$1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 4) \cdot 2$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (1 + 6) \cdot 3$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = (1 + 8) \cdot 4$

……………………………………………

……………………………………………

…………………………………………..

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) \cdot 50$

Догадайтесь, к какому общему закону подводят эти примеры, выразите его в общем виде и докажите.

4.Даны уравнения: $x^2+2\,\frac{1}{2}\,x+1=0$; $x^2-3\,\frac{1}{3}\,x+1=0$; $x^2+4\,\frac{1}{4}\,x+1=0$; $x^2-5\,\frac{1}{5}\,x+1=0$. Найдите корни. Подметьте и обоснуйте закономерности, связывающие значения корней и коэффициентов данных уравнений.

Очевидно, что выполнение упражнений такого вида способствует формированию у учащихся компетенций, высказывает утверждения обобщенного характера на основе рассмотрения несколько частных случаев, воспитывает интерес к математике.

Одним из основных средств включения учащихся к учебно – исследовательскую деятельность – это применение методов проблемно – диалогического обучения. Проблемное обучение обеспечивает творческое усвоение знаний, при котором на уроке изучения нового материала учитель ведет учеников по всем этапам научного творчества: через постановку учебной гипотезы (проблема) и поиска ее доказательств к оформлению доказательств и реализации найденного решения. Другими словами, учитель не предлагает знания в готовом виде, а поручает учащимся «открыть» новый факт, именно в этом – суть проблемного обучения. Учителю необходимо методично обоснованно создать проблемную ситуацию вывести к учебной проблеме и организовать в форме наводящего диалога исследовательскую деятельность учащихся по поиску ее решения.

А.М. Новиков и Д.А. Новиков [140] отмечает, что «Исследовательское обучение рассматривается как один из методов проблемной подготовки, наряду с проблемным изложением и частично – поисковый (эвристический) метод проблемного обучения», Новиков А.М.[140].

Г. К. Селевко [187] считает, что «подобно проблемному обучению (технология проблемного обучения) понимается такая организация учебного процесса, которая предполагает создание в сознании учащихся, под руководством учителя, проблемных ситуаций и организацию активной самостоятельной деятельности учащихся в их решении, в результате чего и происходит творческое овладение знаниями, умениями, навыками (ЗУН) и развитием умственных способностей (СУД)» Г. К. Селевко [187, стр.219].

Проиллюстрируем исследовательский подход к изучению темы «График квадратичной функции» на уроках алгебры в 9 класса, Г. К. Селевко [187, стр.219].

Для этого нужно повторить, что график функции $Y = a(x-m)^2 + n$ является образом параболы $Y = ax^2$ при условии, отображающем начало координат на точку с координатами $(m; n)$ как параллельным переносом отображающих началом координат на точку с координатами $(m; n)$. Уметь определять координаты времени параболы: которая служит графиком функции $Y = a(x-m)^2 + n, a\ b$ симметрии и направления «ветвей».

Основную цель, которую необходимо решать при его изучении, - это создать платформу к рассмотрению следующего тема «График квадратичной функции».

Изучение алгебраического текста начинается с **формулировки проблемной задачи:** необходимо определить, что предусматривает собой график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 35$. Уместно предложить учащимся определить координаты множества точек графика. Скорее, обязательно они начнутся со значений переменной, равной 0,1,2. Множество значений соответствующих x и y будет выглядеть так:

x	*0*	*1*	*2*
y	*35*	*27,5*	*21*

В связи с этим, естественно, заметить, что удобнее выбирать другие точки для построения графика. Чтобы узнать, какие из них мы трёхчлена $\frac{1}{2}x^2 - 8x + 35$ квадратного двучлена (с этим преобразованием учащиеся уже встречались неоднократно). Тогда это уравнение можно записать в форме $y = \frac{1}{2}(x-8)^2 + 3$.

Рассмотренная нами задача – сводилась к выявлению того, что представляет собой график уравнения $y = \frac{1}{2}(x-8)^2 + 3$. При нахождении значений переменной x и значений, соответствующих переменной у удобно начинать при условии значения x, равного 8: если $x = 8$ выражений $\frac{1}{2}(x-8)^2 + 3$, тогда наименьшее значение, будет равно 3. Потом можно взять значение x, которое отличается от 8 тем же числом, например: x=5 и x=6, х=9 и x=16 и т.д. Действительно, соответствующие значения выражений $\frac{1}{2}(x-8)^2 + 3$ будут равны между собой, поэтому соответствующие точки графика функции симметричны относительно прямой: $X = 8$.

Изобразив несколько точек функций в координатной плоскости, ученики получают возможность увидеть, что эти точки, но, по-видимому, принадлежат к параболе. С помощью шаблона можно показать, что эта парабола равна параболе $y = \frac{1}{2}x^2$. При построении с помощью шаблона $y = \frac{1}{2}x^2$ в той же, системе координат, что и графика уравнения $y = \frac{1}{2}(x - 8)^2 + 3$ является образом параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ при параллельном переносе $\overrightarrow{00}$; который точку $\vec{0}(0)$; отображает на точку $\vec{0}^1$(8;3). Для доказательства этого, вспоминается тот факт, что при осуществляем параллельном переносе любая точка $M(x_0;\ y_0)$ отображается на точке $M^1(x_0 + 8;\ y_0 + 3)$. Аргументация данного утверждения в учебнике иллюстрирована для частного случая, когда точка $M(x_0;\ y_0)$ расположена в 1 координатном углу (доказательство дано потом). Заметим, что при введении понятия «координат вектора», легко можно проводить рассуждения и для общего случая.

Скорее всего, пусть $M(x_0;\ y_0)$ - любая точка системы координаты плоскости и $M^1(x; y)$-и образ при параллельном переносе 00; где 0 (0:0) и $0^1(8;3)$. Так как, $MM^1 = 00^1\ и\ MM^1 = (x - x_0; y - y_0),\ 00^1(8;3), то\ x - x_0 = 8; y - y_0 = 3$. Отсюда $x - x_0 = 8; y - y_0 = 3$.

Закончить объяснение следует формулировкой общего положения новое знание: график управления $Y = a(x-m)^2 + n$ есть образ параболы $y = ax^2$ при параллельном переносе, который начало координат отображает на точку с координатой $(m; n)$.

В конце для закрепления знаний, умений и навыков по данной теории могут быть решены задания (из учебника).

Следует отменить, что в этих задачах от учащихся не требуется выполнять какие–либо чертежи. Однако в некоторых случаях рекомендуется иллюстрировать чертежи, заранее подготовленные учителем. Для того чтобы перейти к упражнению 24 – 31 (из учебника), необходимо сформулировать следствие, которое даётся в конце теоретической части тема: график уравнения $y = a(x-m)^2 + n$ является параболой равный параболе $y = ax^2$, а ее вершиной – координата с точкой $(m; n)$, а осью симметрии – прямая $x = m$, при $a > 0$ «ветви» параболы направлены вверх, а при $a < 0$ вниз.

Дополнительные упражнения к пункту предназначены, в основном, для работы с сильными учащимися, для использования на занятиях кружка. Они служат для иллюстрации того факта, что график любого уравнения вида $y = f(x-m) + n$ модно рассматривать как образ графика уравнения $y = f(x)$ при параллельном переносе 00^1, где 0 – начало координат, $\overrightarrow{0^1}$ точка с координатами $(m; n)$. Этот материал не предназначен для ознакомления со всеми учащимися класса.

Указания и упражнения. №1 (подобно с.37)

Уравнения параболы F^1 имеет вид: $Y = 1,5(x-m)^2 + n, где\ m\ и\ n -$ координаты точки 0^1. Имеем: $m = 2, n = 5, y = 1,5(x-2)^2 + 5$.

2 (подобно с.42).

Уравнение имеет вид: $y = 8(x-m)^2 + n$, где тип- координаты точки 0^1.

а) $y = 8(x-9)^2 + 4$ *б)* $y = 8(x+2)^2 - 16$

в) $y = 8(x-0)^2 + 5$m. е) $y = 8x^2 + 5$

г) $y = 8(x-1)^2 + 0$m. е) $y = 8(x-1)^2$

3.Уравнение имеет вид: $y = a(x+3)^2 + 5$.

а) $a = 1; y = (x+3)^2 + 5; a = -2{,}5; y = -2{,}5(x+3)^2 + 5$

4.Задано уравнение вида $y = (x-m)^2 + n$. Координаты точки 0^1: $x = m; y = n$.

а) $m = 4; n = 2,$ *т.еточка* 0^1 *имеет координаты* $(4; 2)$;

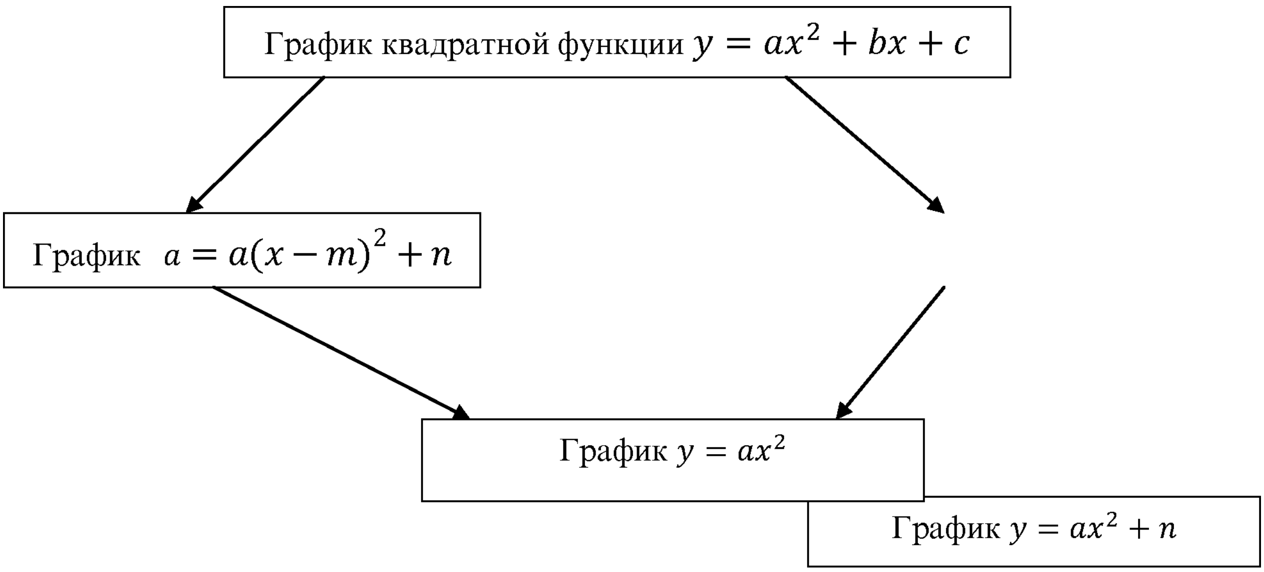
б) $0^1(-9; -8)$; *в*)$0^1(-27; 0)$*г*)$0^1(0, -6{,}3)$.

5.а) $a = 3;\ 0^1(2; 10)$ *г*)$a = 1; 0^1(2; 0)$

б) $a = -8;\ 0^1(1; -6)$ *д*)$a = -1;\ 0^1\ (0; 6)$

в) $a = 1, 0^1\ (0; 2)$ *е*)$a = -1; (-7; 0)$

Таким образом, для построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ появляется следующая теория, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ является параболой, равной $y = ax^2$ ось симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ - является прямой $x = \frac{b}{2a}$ *при* $a > 0$ «ветви» параболы направлены вверх, а при $a < 0$ - направлены вниз. Доказательство этой теоремы основано на предыдущей точке: для достижения желаемого результата, достаточно показать, что для каждой квадратичной функции можно дать уравнение в виде $Y = a(x-m)^2 + n$. Этот процесс можно изобразить в виде граф – схеме.



Предложенная система, показала что в процессе работы учащихся, научились устанавливать развернутые связи между понятиями темы, фиксировать существенные признаки изученных понятый, уверенно связывать теоретические знания с практикой прослеживать процесс становления того или иного факта, рассматривать явления в их внутренней связи подчиненности.

Приведем пример:

Задача. Найдите экстремум функции $f(x) = |-2x^2 + x + в|$, на отрезке $[0;\ 1]$.

Рассмотрим теперь решение исходной задачи и методики её изложения в форме проблемно – диалогической между учителем и учеником.

- Какие элементы заданы задачей?

- Функция $f(x) = |-2x2 + x + в|$, на отрезке [0; 1], наиболее значимой функции.

- Какие из них является существенными?

- У нас нет соображений, на основе которых можно было бы выделить какие-то элементы задачи и поэтому будем считать их все существенными.

- Будет ли функция $d\ (x) = -f(x) = -2x^2 + x + в$ являться элементом задачи?

- Так как эта функция неопределённо составляет конструкцию функции $f(x)$ $(f\ (x) = |d\ (x)|)$, то ее, несомненно, следует считать элементом задачи.

- Что такое наибольшее значение функции на отрезке [x; B]?

- Наибольшее значение функции f(x) есть величина H = так { f(x), f(в), δ_1, δ_2, ….., δ_n} где δ_1 – экстремальные значения f(x). В нашем случае, очевидно, наибольшие значения функции f(x), зависят от параметров, т. е. являются функции от $в$ = H (в).

- Что нам необходимо знать, чтобы найти H (в)?

- Очевидно, для отыскания H (в) на отрезке [0; 1], необходимо решить три задачи:

а) Найти $f(0)$;

б) Найти $f(1)$;

в) Найти экстремальное значение функции f(x).

Первые две задачи просты и для их решения достаточно подставить вместо X его значение 0 и 1. Получим $f(0) = |в|$ $и$ $f(1) = |в - 1|$
Давайте перейдём к задаче в).

- Очевидно, что найти экстремальные точки f(x) можно решив уравнение f(x) = 0, но нахождение производной для 7-9 недоступно.

- Нельзя ли сделать иначе? Рассмотрите исходную с заданной на более простую функцию.

- Так как $f(x) = |д\,(x)|$, то имеется предположение, что исследование функции д (x) приблизит нас к цели. Найти экстремальные точки функции $д$ (x) = $-2x^2 + x + в$ мы умеем. В силу того, что $д\,(x) = -2x2 + x + в = -2\,(X - \frac{1}{4})^2 + (в + \frac{1}{8})$ мы получим, что функции $д\,(x)$ принимает максимум значения равного $в + \frac{1}{8}$ при $x = \frac{1}{4} \in [0;\ 1]$.

- Попробуйте перевести эта задачу на язык геометрии, т. е. построить геометрическую интерпретацию данной задачи. Возможно, эту новую, но по структуре полностью совпадающую с исходной задачу, решить будет легче?

- Графиком функцию $д\ (x)$ будет являться парабола, полученная из параболы $д\,(x) = -2x^2 + x$ путем движения.

Построим график функции $f(x) = |д\,(x)|$ на отрезке [0; 1] для различных значений получается путем отражения той части графика функции $д\,(x)$, которая лежит ниже OX от этой оси.

Теперь не трудно установить, что экстремальной точкой функции $д$ (x) является экстремум и для функции f(x) = $|д\ (x)|$. Это следует из того факта, что в точке Х функция д (х) переходит от возрастания к убыванию, то в этой же точке происходит подобный переход и для функции |д (х)|.

- А не может ли случиться, что функции $|\partial\ (x)|$ имеют и другие отличные от Х = $\frac{1}{4}$, экстремальные точки?

- Поскольку парабола имеет один интервал возрастания и один убывания, и не более двух точек пересечения с осью ОХ, то функция $|\partial\ (x)|$ = f(x) – может иметь не более четырех интервалов возрастания или убывания, и стало быть не более трех экстремальных точек. Одна из них для данной функции f(x) есть экстремальная точка функции д (х) – Х = $\frac{1}{4}$, и две другие могут появиться.

Поэтому, среди экстремальных точек нам достаточно рассматривать лишь точку Х = $\frac{1}{4}$, *в которой* $f(\frac{1}{4})$ = |в + $\frac{1}{8}$|.

- Таким образом, к чему же свелась задача?

- Мы получили в явном виде функции Н (в)

Н (в) = так { $|в\ -\ 1|, |в|, |в\ +\ \frac{1}{8}|$}

Теперь нам для решения исходной задачи необходимо найти ее минимум.

- Каким образом найти минимум этой функции?

- С подобными функциями мы не встречались в школе, интересно конструкции этой функции.

- попробуйте, прежде чем, искать минимум этой функции хорошо представить себе её.

- Чтобы хорошо представить поведение этой функции попробуем нарисовать ее график. Для этого, очевидно, надо построить график функции $|в\ -\ 1|, |в|, |в\ +\ \frac{1}{8}|$ и искомым графиком будет множество тех точек, которые лежат «выше» всех.

- Таким образом функции Н (в) = так $\{|в\ -\ 1|, |в|, |в\ +\ \frac{1}{8}|\}\ =\ 1$ – в, если $в\ \leq \frac{7}{16} B\ +\ \frac{1}{8}$, если в> $\frac{7}{16}$

Очевидно, что такому анализу путем. $1 - в = в + \frac{1}{8}$; $в = \frac{7}{16}$

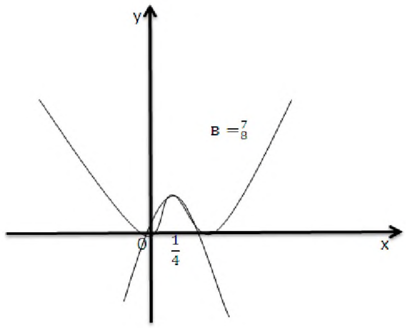
- Как же найти минимуму этой функции?

- По графику видно, что минимум этой функции равен $\frac{9}{16}$ и достигается в точке в = $\frac{7}{16}$.

Задача решена.

Построим график функции $f(x) = |-2x^2+x+в|$

$1 - \frac{1}{8} = 2в$ $\frac{7}{8} = 2в : в = \frac{7}{16}$.



Таким образом, для каждого этапа процесса формирования исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре в 7 – 9 классах определили цель его содержания. Исходя из проведённого анализа работ известных методистов, были разработаны рекомендации по составлению системы упражнений для каждого этапа. А также была составлена система упражнений, состоящая из несколько частей, которые обеспечивают успешное формирование и усвоенные данные исследовательских компетенций.

§ 2.2. Использование исследовательских компетенций в процессе решения задачи повышенной трудности по алгебре 7 – 9 классов

Проблема формирования исследовательских компетенций в процессе обучения математике рассматривается методической наукой как одно из необходимых условий эффективности математической подготовки выпускников средней школы, способных творчески работать и решать самостоятельно небольшие сложные математические задачи.

В зависимости от вида деятельности учащихся система формирования элементов исследовательской деятельности естественным образом разбивается на два этапа:

- этап подготовки к исследовательской деятельности;
- этап осуществления исследовательской деятельности.

В первый этап входят все те педагогические и методические приемы исследовательской деятельности, которые используются в процессе рассказа и показа элементов исследовательской деятельности. При этом учащиеся ограничиваются пассивной ролью слушателей и наблюдателей.

Во второй этап входят такие педагогические и методические средства, которые используются учителем для непосредственного вовлечения учащихся в исследовательскую деятельность.

При этом сами учащиеся играют активную роль в деле овладения элементами исследовательской деятельности. Если на первых этапах системы формирования основная роль отводится педагогическим приемам и методам, стимулирующим усвоение мыслительных операции, а через них и основных умственных действий, то во втором этапе основная роль отводится содержанию, на основе которого учащиеся вовлекаются в исследовательскую деятельность с использованием ее основных элементов, а именно, системе задач деятельности учащихся, при решении которых на данном этапе обучения является исследовательской.

Сформировать умственные действия, являющиеся основными элементам исследовательской деятельность – это значит научить учащихся владеть соответствующими действиями. Дело в том что, человек может не знать действия, но владеть им и уметь его производить, в то время как возможен и другой вариант – человек может знать, что надо делать, но не уметь.

Так, например, человек может знать, какие действие надо производить при плавании, но не уметь их выполнять и поэтому уметь плавать.

Таким образом, владение элементами исследовательской деятельности, означает умение пользоваться ими в деятельности.

Главное в обучении – научить учащихся владеть действиями, но знание и осознание их – путь к достижению цели.

Говоря о владении основными элементами как о цели их формирования, мы не можем не отметить роли второго этапа системы формирования, так как, только включаясь в деятельность, можно надеяться уметь пользоваться, указанными действиями, владеть ими. Таким образом, первый этап системы формирования направлена на ознакомление с основными элементами исследовательской деятельности, осознание их является основой второго этапа системы формирования, которая направлена на овладение ими.

Целью нашего исследования является рассмотрение некоторых аспектов системы формирования таких элементов исследовательской деятельности, как разбиение задач на подзадачи.

Природой математической деятельности, особенно и самой математики как науки, является постепенное стремление к деятельности алгоритмического характера, сведения процесса решения всяких классов задач к алгоритмической деятельности. Для того, чтобы деятельность по решению соответствующего класса задач будет алгоритмической, ей всегда предшествует исследовательская деятельность, направленная на нахождение алгоритмов.

Исследовательская деятельность ученых в области математики направлена на нахождение новых фактов, закономерностей, утверждений, на создание новых приемов, алгоритмов, методов исследования целых классов задач. Происходит алгоритмизация деятельности по решению исследованных классов задач. В процессе алгоритмизации возникают новые вопросы, новые темы для исследования, связанные с нахождением более эффективных алгоритмов, а также с переносом построенных алгоритмов или их модификацией на более широкий класс задач. Происходит постоянная замена исследовательской деятельности алгоритмического характера, и эта замена порождает новые вопросы, новое поле для исследовательской деятельности. Можно сказать, что в математике исследовательская деятельность порождает алгоритмическую, которая затем « стремится вытеснить» исследовательскую деятельность. Единство и борьба двух противоположных видов деятельности – исследовательской или алгоритмической является движущей силой развития математики.

Эта особенность присуща математике, как предмету обучения. Процесс обучения математике состоит, в организации замены учебной исследовательской деятельности по изучению основных понятий и фактов курса математики на деятельность алгоритмического характера при работе с ними и их использовании. Очевидно, что полная замена исследовательской деятельности на деятельность алгоритмического характера в процессе обучения математике принципиально невозможно, в силу того, что первая остается одной из ведущих видов деятельности в процессе обучения.

Эта особенность в принципе предшествует исследовательской деятельности алгоритмическую.

Так как исследовательская деятельность всегда предшествует работе по алгоритму, то это должно быть отражено в обучении. Алгоритмы не должны даваться учащимся в готовом виде, им должна предшествовать исследовательская работ по решению ряда задач исследовательского характера, приводящих к построению алгоритма самими учащимися. Это положение является одной из возможных реализаций указанного выше принципа.

С другой стороны можно говорить о принципе единства двух видов деятельности – исследовательской и алгоритмической, в процессе обучения.

В обучение ещё встречается противопоставление указанных видов деятельности. Это противопоставление связано с характерными особенностями этих деятельностей – недетерминированность с одной стороны и строгая детерминированность с другой, - и нередко является причиной их разграничения изоляции одной от другой. Все, что приводит к вульгарному представлению о процессе познания, что, в конечном итоге, наносит вред обучению. В данное время в процессе преподавания математике мы еще имеем много примеров отрыва как исследовательской деятельности учащихся от алгоритмической, так и наоборот. В процессе обучения, при работе по алгоритму, необходимо вовлечение учащихся в исследовательскую деятельность, так как алгоритм дает для достаточно широкого круга задач и при решении конкретной задачи по известному алгоритму, как правило, приходиться выполнять много лишней работы действий, предписываемых алгоритмом, но не являющиеся необходимыми для решения данной задачи. Видение же динамики задачи характерное для исследовательской деятельности, позволяет освободиться от большого объема лишней работы. Следует учитывать также, и то, что школьный курс математики включает в себя большое число методов, которые задаются не алгоритмами, а предписаниями алгоритмического типа, выполнение которых полностью недетерминировано и требует владения некоторыми элементами исследовательской деятельности. Так попытка полностью детерминировать процесс решения уравнений и неравенств, вынося нахождение ОДЗВ в качестве обязательного первого пункта «алгоритма» решения уравнений и неравенств, является блестящим примером отрыва учащихся от исследовательской деятельности, попытки обойтись только деятельностью алгоритмического характера.

Таким образом, в процессе обучения математике как алгоритмической, так и исследовательской деятельности учащихся должны присутствовать элементы алгоритмической деятельности, так и, наоборот, в алгоритмическую деятельность должны выходить элементы исследовательской деятельности. Все сказанное позволяет говорить о том, что системы формирования элементов исследовательской деятельности и алгоритмической культуры находятся во взаимосвязи и это единство необходимо учитывать в процессе обучения математике.

Таким образом, мы переходим к выводу, что одним из требований к глубокому овладению элементами исследовательской деятельности является выполнение принципов предшествования исследовательской деятельности алгоритмической и их единство в процессе обучения.

Если учитель при изложении темы или доказательства некоторого утверждения выступает в роли простого передатчика математический информации, то ни о каком эффективном формировании элементов исследовательской деятельности не может быть и речи. Как показали исследования психологов, владение умственными действиями невозможно без активной работы учащихся, активизации их деятельности. Если учитель, прежде чем, сформулировать какое–либо утверждение добиться того, чтобы это утверждение стало очевидным для учащихся, чтобы они сами увидели существование факта, указанного в утверждении, и при доказательстве учитель не ограничивался только изложением логической по исследованию утверждений, а стремился бы показать как, каким образом, найдена искомая последовательность умозаключений, что натолкнуло его при доказательстве на использование того или иного факта, какие умственные действия и мыслительные операции ему пришлось совершить для нахождения решения, т.е. если он будет не только излагать доказательство, но и, что, на наш взгляд, наиболее важно, включить в этот процесс весь класс. В процессе поиска этого доказательства, будут подчеркивать методы его нахождения и использования при этом представляют собой реализацию педагогического принципа активности учащихся о том, что умственные действия способствуют активности обучения и являются необходимым условием формирования умственных действий, являющихся элементами исследовательской деятельности. Такое преподавание способствует формированию элементов исследовательской деятельности и математической культуры.

С другой стороны, в самом содержании школьного курса математики, имеется достаточное число примеров, сходных по структуре систем, наборов утверждений, представляющих собой разбиение некоторой достаточно общей задачи на подзадачи. Очевидно, что знакомство с этими примерами на уровне рассмотрения элементов исследовательской деятельности, способствует их формированию.

Мы переходим ко второму этапу системы формирования, связанному, непосредственно, с вовлечением учащихся в исследовательскую деятельность.

Как уже отмечалось ранее, вовлечение учащихся в самостоятельную исследовательскую деятельность возможно только на уровне их деятельности по решению задач исследовательского характера. Сложившаяся в настоящее время система задач курса математики средней школы, не может являться базой для вовлечения в исследовательскую деятельность учащихся. Наша цель – разработать систему исследовательских задач, на основе которой можно формировать исследовательские навыки.

На необходимость разработки такой системы задач указывал и А. И. Маркушевич [117]: «Развивать творческий потенциал ученика можно только, включая его в творческую деятельность. Никакой рассказ о ней и даже показ ее не может научить творчеству. Как бы хорошо ни было поставлено сообщение учащихся новых знаний посредством объяснительно – иллюстративного метода, оно не обеспечит развитие творческого мышления и познавательной самостоятельности учащихся. Чтобы включить учащихся в творческую деятельность, нужна система познавательных задач поискового характера» (А.И. Маркушевич [117]: «Совершенствование образования в условиях научно – технической революции». Сб. «Проблемы социалистической педагогики». Сост. М.Н. Кузьмина (Педагогика, М.,1973, с. 235).

«Для достижения оптимального уровня развития творческих компетенции у каждого учащегося, - пишет И. Я. Лернер [105], - познавательные задачи должны представлять собой не случайную совокупность, а систему, отвечающую определенным показателям содержательного и формального характера; систему постоянно усложняющихся по процессу решения задач, индивидуализированных в зависимости от возможностей учащихся. Соответствие системы задач выдвинутым показателям обеспечивает овладение применением основных знаний и умений в новых ситуациях, усвоение основных характеристик творческой деятельности. Такая система должна быть выработана дидактикой и методикой обучения отдельным предметам и представлена в школе в виде дидактических материалов для учащихся» (И. Я. Лернер [105] «Познавательные задачи в обучении гуманитарным наукам». М.: «Педагогика», 1972, стр.3-4).

Управление исследовательской деятельностью при решении задач осуществляется с помощью двух подходов к решению задач: алгоритмического и творческого.

Алгоритмический подход предлагает обучение учащихся некоторым алгоритмам решения задач. Он является наиболее удобным и эффективным для внешнего руководства деятельностью учащихся: позволяет учить решать типовые задачи всех учащихся; создает у учащихся уверенность в своих силах и способностях; формирует положительную мотивацию учения.

Самый современный подход к решению задачи – эвристический. Процесс решения происходит в области подсознания и решения, полученных таким способом, называется интуитивным. В интуитивном мышлении отсутствуют четко определенные этапы. Основная его тенденция – свернутое восприятие проблем сразу (Д.Пойа [150] , Хуторский А.В [203] эвристик).

Эвристический подход включает в себя некоторые, не вполне точные методы решения задач: можно прейти и не прейти к результату. Но эвристические приемы незаменимы тогда, когда алгоритм решения неизвестен.

Кроме того, достойным эвристическим приемом является возможность получать более быстрое и простое решение некоторых задач, имеющих известный алгоритм решения. Эвристический метод решения задач является личным, усвоенным, самостоятельным приемом деятельности учащихся. Он в какой – то степени последователен и менее подходит для внешнего руководства, его можно использовать в решении большого количества задач.

Два приема, применение которых намечалось выше – алгоритмический и эвристический – взаимно дополняют друг друга. Чтобы алгоритмическим подходом решить задачу, мы должны распознать ее вид, выбрать необходимый алгоритм и реализовать его. Сущность этих действий состоит в поиске подходящего элемента из предшествующего опыта – эвристического. Иначе говоря, при решении задач нестандартного характера используются алгоритмические элементы.

Таким образом, чтобы учащиеся могли справиться с решением различных задач, их нужно обучать алгоритмам и помочь накопить опыт использования эвристических приемов.

Опыт показывает, что для использования эвристического метода учащихся необходимы исследовательские компетенции.

По мнению В.А. Андреева [9] под эвристическим приемом следует понимать множество действий, оказывающих помощь учащимся разумно осуществлять поиск решения задач исследовательского характера.

Стадии формирования приема на основе осознания совершенствуются умения. Входящие умения в состав исследовательских компетенций деятельностного аспекта, можно отнести к обобщенным умения, следовательно, они обеспечивают «переносимость» формированных методов на широкий круг новых задач. Таким образом, нами разработаны соответствующие эвристические методы поиска решения задачи:

1. Метод выделения данных и искомых элементов задачи.
2. Метод выделения связей между данными элементами задачи (подзадачами).
3. Метод построения вспомогательных моделей задачи.
4. Метод составления задачи по сокращенным записям.
5. Метод построения математической модели текстовой задачи.
6. Метод выделения следствий из условия задачи.
7. Метод выделения следствий из требования задачи (анализ).
8. Метод использования подобной задачи.
9. Метод составления обратных задач.
10. Метод конкретизации задачи.
11. Метод обобщения задачи.
12. Метод введение вспомогательных элементов.
13. Метод разбиения задачи на подзадачи.
14. Метод преобразования задачи.

Исследовательский подход в процессе решения задач способствует учащихся осмыслить основные этапы решения задачи и тем самым сформулировать навыки их решения. Использование исследовательского подхода, приводит к усложнению обыкновенной стороны деятельности, мы под которым представляем не только и не столько усиление «технической сложности задачи», сколько усложнению составляющей математического мышления – анализ условия, нахождение пути решения.

Таким образом, при изучении той или иной темы курса на уроке математики учащимся имеет смысл предложить задания, способные развивать исследовательские компетенции.

Приводим пример.

Пример 1. Учащимся предлагается по признаку делимости с остатком задачи. Свойство делимости чисел, связанное с определением деления с остатком и доказательством его свойств, учащимся можно предложить самостоятельно доказать на факультативном занятии такое высказывания, используя исследовательские компетенции для того, чтобы проверить как они усвоили материал по применению новых компетенций.

Докажите:

- Если числа a *и* b при делении на число c получается один и тот же остаток, тогда разность $a - b$ делится на c.
- Если разность двух чисел a *и* b делится на число c, то числа a *и* b при делении на c дают один и тот же остаток.
- Если числа a при делении на число *в* дает остаток r, то число a^2 *и* r^2 при деление на b будут давать равные остатки.
- Если число a при делении на c дает остаток r_1, число *в* при делении на с дает r_2, то число $a \cdot b$ и $r_1 \cdot r_2$ при делении на c дает одинаковые остатки.

При этом учащиеся будут использовать следующие исследовательские компетенции: формировать, описывать в различных видах, математических моделях одно и то же высказывание (при записи условия в виде равенство);

- устанавливать отношения между понятиями;
- выделять понятия, свойства, теоремы, утверждения, применимые к решению задачи, доказательству теоремы;
- анализировать задачу, уравнение, формулу и т.п. при выделении у данного и неизвестного, определение преобразований формул;
- устанавливать правдоподобные методы решения задач, выявлять их структурные сходства при нахождении метода доказательства и т.д.;
- строить алгоритм решения задачи, проблемы непосредственно, при проведении самого доказательства;
- провести обобщающие умозаключения, сделать выводы, например, при формулировании новых свойств делимости чисел ссылаясь на данные утверждения.

В процессе этого же урока целесообразно предложить такую задачу:

Задача 1. Доказать, что число $3n + 2$ не является квадратом целого числа ни при каком натуральном n.

В процессе данной задачи у учащихся срабатывает условие определять способ решения (компетенции анализировать задачу, уравнение, формулу и т.п.). В такой ситуации полезно использовать метод «от противного» предложить, что существует числа a(целое), квадрат которого будет равен $3n + 2$ (компетенции строят алгоритм решения).

Теперь, введя обозначения, учащиеся записывают условие в виде равенства (компетенции формулировать, записывать в различных формах, математических моделях одно и тоже утверждение).

$$3n + 2 = a^2 \quad (1)$$

Теперь задача обретает следующую форму и принимает условие: решить уравнение $3n + 2 = a^2$ в целых числах относительно переменных a и n (диофантово уравнение с двумя переменными); (компетенции устанавливать аналогию методов решения задач, обнаруживать их структурные сходства).

Теперь учащимся предлагают данное уравнение рассматривать как деление некоторого числа a^2 на 3 с остатком 2 (компетенции восстанавливать подобно методам решения задач, выявлять их структурные сходства).

Сформулирована <u>гипотеза:</u> если среди остатки при делении a^2 на 3 не найдется остатка 2, то уравнение (1) решения не имеет, а значит, предположение о существовании числа a, квадрат которого будет равен $3n + 2$ неверно (компетенции формулировать учебную проблему, выдвигать, гипотезу).

Теперь учащиеся проверяют гипотезу, т.е. находят остатки при делении a^2 на 3 (используя свойства деления с остатком, сначала находят остатки при делении a на 3 компетенции разбивать задачу на подзадачи (выделять логические составляющие задачи). Это число 0 и 1, т.е. учащиеся убеждаются, что среди них нет остатка 2 и делают вывод (компетенции делать обобщающие заключения, выводы); уравнение (1) решения не имеют а значит, предположение о существовании числа a , квадрат которого равен $3n + 2$ неверно, т.е. такого число не существует. Утверждение доказано.

Здесь же можно предложить учащимся доказать, используя метод исследования остатков, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:

1) $y^2 = 7x^2 + 3$;

Уравнение можно рассматривать как деление y^2 на 7 с остатком 3 (компетенции выявлять математические закономерности; компетенции выделять понятия, свойства, теоремы, утверждения, применимые к решению задачи, доказательству теоремы). Поэтому для его решения учащиеся сначала находят остатки при делении $y\,на\,7$ (компетенции разбивают задачу на подзадачи (выделяют логически составляющие задачи); (компетенции строить алгоритм решения задачи). Это числа: 0;1;2;3;4;5;6. Применяя метод остатка, учащиеся определяют остатки при делении $y^2\,на\,7$ (компетенции выделяют понятия, свойства, теоремы, утверждения, используемые в решении задачи, доказательстве теоремы). Это числа: 0;1;2;3;4. Среди этих остатков нет числа 3. Вывод: уравнение не имеет решений в целых числах.

2) $y^2 = 7x^2 + 5$

Подобное решение 1) (компетенции восстанавливать подобно методам решений задач, устанавливать их структурные сходства).

1) $2x^2 = 5y + 1$

Продолжая действия в процессе решения двух предыдущих уравнений (компетенции восстанавливать подобно методам решения задач, устанавливать их структурные сходства), учащиеся находят остатки при делении $x\,на\,5$, затем остатки при делении $x^2\,на\,5$, и, применяя свойства деления с остатком произведения чисел, остатки при делении $2x^2\,на\,5$ (компетенции выделяет понятия; свойства; теоремы; утверждения, используемые в решении задач; доказательства; теоремы). В конце процесса получают ответ, что уравнение не имеет решений в целых числах.

4) $3x^2 = 5y + 4$ Решение аналогично 3.

5) $5x^2 - 7y^2 = 9$

При решении уравнения $5x^2 - 7y^2 = 9$ учащимся необходимо сперва выполнить преобразования уравнения, чтобы привести его к виду (компетенции выявлять математические закономерности; анализировать задачи, уравнения и т.п.);

Далее решение аналогично уравнение(3)

3. Решить уравнение $2a + 1 = b^2, где\ a - простое, a\ b$ –целое.

Действуя по аналогии с предыдущими задачами, учащиеся замечают, что надо разложить её на множители, применяя формулу разности кубов:

$$(b-1)(b^2+b+1) = 2a$$

Действительно, если число y - простое, то правая часть уравнения будет делиться на четыре: 1;2; y; $2y$. Учитывая, что второй множитель левой части – число нечетное, получаем следующие две системы;

$$\begin{cases} b-1=2 \\ b^2+b+1=a \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} b+1=2a \\ b^2+b+1=1 \end{cases}$$

при решении второй системы получаются числа, не удовлетворяющие условию задачи. Таким ответом будет решение первой системы – пары чисел (3;13); $2 \cdot 13 + 1 = 3^3$

Так как известно, что на каждом этапе обучения математике необходимо учить школьников решать задачу вообще, для которых нужны исследовательские компетенции, прививать им желание и навыки к осуществлению работы исследовательского характера. При этом школьников следует научить отдавать себе отчет в том, какой компетенции они приобрели, решая ту или иную задачу, что имеет смысл сохранить это в памяти, а что можно забыть. Необходимость первостепенной важности проблемы, стоящей перед учителем, - проявить у учащихся желание к решению той или иной задачи. Особенно важно искать достаточное количество интересных задач и делать их привлекательными для учащихся. Как действовать в этом случае – решать самом учителю.

Задача 2. Найти все целочисленные решения, взятые уравнения $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$

Решение аналогично предыдущей задаче разложим левую часть на множители:

$$3x^2 + 4xy - 7y^2 = (x - y)(3x + 7y)$$

Имеем $(x - y)(3x + 7y) = 13$, поскольку 13 можно представить в виде произведения двух целых чисел с учетом порядка четырьмя способами $(13 = 1 \cdot 13 = 13 \cdot 1 = (-1) \cdot (-13) = (-13) \cdot (-1))$, то получаем четыре системы:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 13 \\ 3x + 7y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 7y = -13 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -13 \\ 3x + 7y = -1 \end{cases}$$

Целочисленные решения имеют лишь 1-я и 3-я системы.

Ответ: (2;1);(-2;-1)

Задача 3. Решить в целых числах уравнения $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

В решении используем компетенции преобразования задачи выражая y через x $y = \frac{2x^2+9x-2}{2x-1}$. Преобразуем полученную дробь:

$$y = \frac{2x^2+9x-2}{2x-1} = \frac{2x^2-x+10x-5+3}{2x-1} = x + 5 + \frac{3}{2x-1}$$

Поскольку y и x – целые, то $\frac{3}{2x-1}$ должно быть целым числом. Имеем четыре возможности: 1) $2x$-1=1; 2) $2x$-1=3; 3)$2x$-1=-1; 4) $2x$-1=-3.Затем находим x и y.

Ответ. (1;9);(2;8);(0;2);(-1;3).

Одной из важных исследовательских компетенций является преобразование задачи, но изменяя язык, на котором была задана данная задача. Это значит, что если задача была алгебраическая, то преобразованная задача должна быть тоже алгебраической, ибо если мы изменим язык, на котором изложена задача, то это будет уже не преобразование, а моделирование, которые мы рассмотрим ниже.

В процессе решения уравнения введение нового неизвестного, которое относительно ее уравнения принимает упрощающее вид и имеет более простой легко проводимый к стандартному виду – особо важный метод решения любой вид уравнения.

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся замены.

а) Замена $y = x^n$. В частности, с помощью замены $y = x^2$ решаются, так называемые биквадратные уравнения, т.е. уравнении вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

б) замена $y = (P(x)$ или $y = \sqrt[k]{P(x)}, где\ P(x)$-многочлен. Чаще всего встречаются задачи, в которых делается замена $y = ax^2 + bx + c\ \ или\ y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

в) замена $y = \frac{P(x)}{g(x)}$, где $b(x) и\ d(x)$-и многочлены (например, $y = \frac{x^2}{x+1}$). В частности, с помощью замены $y = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$ решаются возвратные уравнения 4-й степени, т.е. уравнения вида $ax^4 + bx^2 + cx^2 + bx + a = 0$. Это можно сделать таким образом. Разделим уравнения на x^2, получим.

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + +c = 0$$

Поскольку

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$$

учитывая введение нового неизвестного $y = x + \frac{1}{x}$ будем иметь уравнение $ay^2 + by + c = 0$.

Для того, чтобы рассмотреть примеры мы предлагаем два совета.

Первый: С первый возможности следует вводить новое неизвестное

Второй: Полученные уравнения после введения нового неизвестного, следует полностью решить отбросить чужие корни, если они появились, а потом вернуться к первоначальному неизвестному.

Задача 4. Решить уравнение $2x^2 - 6x + \sqrt{x^2 - 3x + 6} + 2 = 0$.

Решение. Сделаем замену $y = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$. Тогда $y \geq 0, x^2 - 3x = y^2 - 6$. После этого получим уравнение относительно y

$2y^2 - 12 + y + 2 = 0 \quad 2y^2 + y - 10 = 0 \quad y = 2; y_2 = -\frac{5}{2}$. y_2не удовлетворяет условию $y \geq 0$. Возвращаемся к X: $\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 2$ $x_1 = 1;\ x_2 = 2$ Ответ 1:2

Интерес у учащихся вызывают задачи, взятые из окружающей их среды, задачи, непосредственным образом, связанные с знакомыми учащимся вещами, опытом и служащие понятной ученику цели.

Например, учитель, желающий обучать школьников решать в множествах натуральных чисел уравнения вида $ax + by = c$, может конечно предложить учащимся выполнить упражнение №521, №522 [Алгебра 7 класса]. Но как показывают наблюдения, учащиеся легче и с большим интересом учатся способам решения таких уравнений, если предложить, например, следующую задачу:

Задача 5. «Чтобы купить вещь, нужно уплатить 19 сомон. У покупателя только трех сомоновые купюры, как покупатель расплатится за покупку? Если у кассира только пятисомоновые купюры?»

Большой интерес, являющийся для учащихся стимулом для приобретения умений и навыков, решение неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в натуральных и целых числах, вызывает, как правило, у учащихся VI-VII классов следующая задача:

Задача 6. «В комнате стоят стулья и табуретки. У каждой табуретки три ножки, у каждого стула четыре ножки. Когда на всех стульях и табуретках сидят люди в комнате 39 «ног». Сколько стульев и табуреток в комнате?» (Если стульев x, табуреток y, то имеем уравнение $4x + 3y + 2(x + y) = 39$, откуда $5y = 39 - 6x, x = 4; y = 3$). Можно интересные задачи на соответствующую тематику найти в разных журналах.

Определив непрерывность и монотонность функции f , проверяем выполняемость условия $f(a) \cdot f(b) < 0$. Если это условие не выполняется и имеет место $f(a) \cdot f(b) > 0$, то уравнения не имеет решения. А если же имеет место равенство $f(a) \cdot f(b) = 0$ то либо a, либо *в* являются корнями данного уравнения.

Можно составить алгоритмические предписания о решении неравенств.

Очень полезным основанием использования исследовательских компетенций является составление обратных задач по отношению к решенной задаче.

«Обратной задачей называется задача, в которой одним из требований является какое–то известное условие прямой задачи, а это условие заменяется ответом прямой задачи» Л.М. Фридман [199].

Конечно, не для всякой задачи можно составить обратную задачу. Например, какую обратную задачу можно составить?

Задача 7. Упростить выражение $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}: \quad \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$. Ответ этой задачи $x - 1$. Вряд ли можно какую – то особую обратную задачу составить для этой задачи. Очень редко, когда можно составить обратную задачу для задач, на доказательство и для некоторых других.

Однако для очень многих задач можно составить, как правило, много разных обратных задач.

Задача 8. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что знаменатель ее равен 3, а сумма шести первым членам равна 1820.

Для того, чтобы легче было составить обратные задачи, следует построить схематическую модель данной задачи. Дано: в геометрической прогрессии: 1) $q = 3$; 2) $S_6 = 1820$. Требуется найти: 1) b_1 2) b_5.

Решив данную задачу, находим: $b_1 = 5$; $b_5 = 405$.

1) Первый член геометрической прогрессии равен 5, а ее знаменатель равен 3. Найти сумму шести первых членов и пятый член этой прогрессии.

2) Первый член геометрической прогрессии равен 5, а сумма первых шести ее членов равна 1820. Найти знаменатель прогрессии член.
3) Пятый член геометрической прогрессии равен 405, а ее знаменатель равен 3. Найти эту прогрессию и сумму шести первых членов.
4) Пятый член геометрический прогрессии равен 405, а сумма первых шести ее членов равна 1820. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Задача 9.

а) Дано уравнение первой степени $5x - 2a = ax - 3$.

Требуется определить область изменения параметра, если данное уравнение имеет решение: $2 < x < 8$.

Ответ: $3{,}25 < a < 4{,}3$

Задача 10. б) (Обратная задача). В уравнении $5x - 2a = ax - 3$ параметр a изменяется на промежутке $3{,}25 < a < 4{,}3$. Определить соответствующую область значения корня.

Ответ: $2 < x < 8$.

Пусть решена следующая задача на неравенства.

Задача 11. а. В каком промежутке должно изменяется число a, чтобы оба корня уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ были заключенные между – 2 и 4?

Ответ: -3 $< a < 5$.

Интересно рассмотреть обратную задачу.

Задача 12. б. Дано уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$. В каких пределах будет изменяться корень уравнения, если параметр a изменится в пределах $-3 < a < 5$?

Задача 13. а Если a^2, b^2, c^2 составляют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ составляют тоже арифметическую прогрессию (a, b, c −члена положительные).

Задача 14. б. (Обратная задача). Если $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ составляют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 тоже составляет арифметическую прогрессию.

Высокого развития исследовательских компетенций учащихся общеобразовательных школ невозможно добиться только при использовании исследовательского метода во время уроков, т.к. это связано и с бюджетом учебного времени и с некоторыми особенностями ряда вопросов содержания, при обучении которых не сосредоточено использовать исследование. Мы считаем, что необходимо решение задач повышенной трудности, направленное на использование исследовательских компетенций на кружковых занятиях для учащихся, потому как интересы и способности лежат в области математики.

На кружковых занятиях по математике организуются систематические занятия по программе, имеющие жесткую связь с программой основных курсов занятий по математике. В группы по организации кружковых занятий учащиеся зачисляются по желанию.

Таким образом, одним из требований к исследовательским задачам, является требование осуществления в практической деятельности учащихся методов решения задач такого вида, которые вытекает из необходимости вовлечения учащихся в исследовательскую деятельность. Задачи такого типа направлены на вовлечение учащихся в учебную исследовательскую деятельность, имитирующую работу ученого исследователя. Поэтому, естественно, потребовать от задач этого типа, чтобы решение их включало основные этапы исследовательской деятельности: этап построения гипотезы.

Переработка в этом плане имеющихся задач из учебника и учебных пособий, заключается, в частности, в замене формулировок требований задачи вида «доказать, что А», «Показать что А», и т.п. формулировками «вопросного типа», «Сколько?», «Найдутся ли?», «Может ли?», «Для любого ли?» и т.п. Или «непосредственного» типа: «найти», «решить», «исследовать» и т.п.

Так в таблице приводим примеры усиления исследовательской нагрузки, имеющейся задачи, путем их переформулировок.

Задачи в старой редакции	Задачи в новой редакции
1.Доказать, что $17^{14} > 31^{11}$	1. Что больше 17^{11} *или* 31^{11}
2.Доказать, что при $a + b = 1$ имеет место равенство $$A = B, где\ A = \frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1}$$ $B = \frac{2(b-a)}{a^2 \cdot b^2 + 3}$.	2[а]. При каких *а* и *в* имеет место равенство $A = B$? 2[б]. Чему равно $A(или\ B), или\ a + b = 1$ 2[в]. Для любых ли *а* и *в* имеет равенство $A = B$?

Хорошим средством обучения решению задач повышенной трудности является использование вспомогательных задач. Способность выбирать вспомогательные задачи способствует тому, что у учащихся уже сформированы определенными исследовательскими компетенциями. Если эти исследовательские компетенции не велики, то учитель, чувствуя затруднения учащегося, иногда сам должен предложить вспомогательные задачи. Целесообразные постановки наводящих вопросов, вспомогательная задача или система вспомогательных задач содействует поиску идею решения. В этом процессе обязательно понимается то, чтобы учащийся, чувствуя радость от решения трудной для него задачи, полученной на основе использования вспомогательных задач или наводящих вопросов, предложенных учителем.

Так, если учащиеся не в силах решить задачу «Найдите все корни уравнения $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0$», то им обязательно предложить следующие вспомогательные задачи:

Решите уравнения:

$а)$ $(x+1)^2+y^2=0$ $(x=-1; y=0)$

б) $x^2-10x+25+y^2=0$ $(x=5; y=0)$

$в)$ $x^2-4x+y^2+2y+5=0$ $(x=2; y=-1)$

Также, например, обучая учащихся преобразованиям выражений с применением формулы сокращенного умножения, были рекомендованы к использованию следующие задания, одновременно, способствующие закреплению у учащихся знаний о признаках делимости.

1. Найдите натуральное число «n», при котором выражение $(3n+8)^2-(3n-5)^2$ будет делиться на 8;10;11;15;39.
2. Известно, что преобразовав выражение $(3n+1)^2-(2n-1)^2$ легко доказать, что оно делится на 5 при любом натуральном значении «n». Приведите примеры выражения, в виде разности квадратов, чтобы оно делилось на 17 при любом натуральном «n». Сколько таких выражений можно составить?
3. Каким числом можно заменить звездочку в выражении $(*\,n+7)^2-(*\,n-6)^2$, чтобы оно делилось на натуральное число 13?
4. Найдите целые значения «n» из множества $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, при которых числовое значение выражения $(n+6)^2-(2n+3)^2$ *делится на* 15 .
5. Каковы целые неотрицательные значения $k \in [-5; 5]$, при которых числовое значение выражения

$$(4k+3)^2-4k^2 \text{ делится на числа}: 15; 27; 35?$$

Если учащиеся затрудняются в решении задач найдите значение выражения.

$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$, но в качестве задачи, призванной подвести учащихся к решению, может быть предложено упражнение № 649 из [Кодиров Н. Алгебра для 7 классов. - Душанбе ,2005. -216с.] при условии, конечно, что оно решалось учащимися: «Упросите выражение $(2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$».

Когда ученик ощущает трудности в процессе решения таких задач, можно подсказать им, что для их решения достаточно использовать формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Учитель должен подсказать, какой формулой необходимо пользоваться при решении задачи и даёт данное задание на дом, так как времени в классе остаётся очень мало. И всё же эта подсказка очень важная для учащихся, чем ознакомление с готовым решением: она может создать у ученика иллюзию того, что он сам решил предложенную учителем задачу; это поможет ученику поверить в свои силы в решении задачи.

Существуют взаимообратные методические приемы решения задачи вспомогательной (подзадачи), для чего необходимо составить обобщенные задачи. Так, например, для решения неравенства $x^2-5|x|+6>0$ учащимся предлагается выбрать одну из трех заданных групп подзадач, состоящих в решении этого неравенства на множествах.

I 1) $D_1=\{x\in R|x<\pi\}$ II 1) $D_1=\{x\in R|x<0\}$ III 1) $D_1=\{x\in R|x<0\}$

2. $D_2=\{x\in R|x\geq\pi\}$ 2) $D_2=\{x\in R|x\geq 0\}$ 2) $D_1=\{x\in R|x\geq 1\}$

В процессе выполнения этого задания учащиеся при рассмотрении первых двух групп подзадача неявно знакомятся с понятиями «существенности» и «несущественности» условий (что существенно для $|x|$; разбиванием «по 0» или «по π»?), полноты и «неполноты» множества подзадач (в данном случае, для каких из приведенных групп подзадач выполняется равенство $D_1\cup D_2=R$?).

При выполнении следующего задания: «Даны подзадачи»

а) *показать, что* $x^2=|x|$

б) *решить неравенство* $y^2-5y+6>0$;

в) *решить неравенство* $|x|>3$;

г) *решить неравенство* $|x|<2$;

д) *найти множество* $M=(M_1\cup M_2)\cap M_3$, *где* $M_1=\{x\in R|x>3\}$

$$M_2 = \{x \in R | x < -3\}\ и\ M_3 = \{x \in R | -2 < x < 2\}.$$

Решение какой задачи они определяют? Учащимся приходится выделить связи между данными задачами и подзадачами, что является существенным.

2.3. Опытно – экспериментальная работа по формированию исследовательских компетенций учащихся 7 – 9 классов в процессе обучения алгебре

Опытно – экспериментальная работа проводилась в соответствии с целью и задачами исследования с 2013 по 2019 года, которая проходила в три этапа: констатирующий (2014-2015 г.), формирующий (2015-2018г) и контрольний (2018-2019гг).

Все этапы эксперимента проводились в школах Согдийского области Республики Таджикистан (школа №17, 6, 31 Матчинский район, и школах №1, 20, 14 г Истаравшана).

Согласно цели и логике педагогического исследования нам неоходимо было решить следующие задачи:

- выявить состояние использования исследовательских методов учителями математики в практической деятельности;
- определить состояние сформированности исследовательских компетенций у учащихся в процессе обучения алгебре в 7 – 9 классах общеобразовательных школ;
- раскрыть возможности формирования исследовательских компетенции в процессе обучения алгебре в 7 – 9 классах общеобразовательных школ;
- создать условия для реализации эффективных путей и средств формирования исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре в 7 – 9 классах;
- определить влияние сформированности исследовательских компетенций на общие умения решать алгебраические задачи;

- показать, что целеобразной организацией некоторых видов внеурочной работы по алгебре в 7 – 9 классах с использованием исследовательских компетенций учащихся, способствует формированию интереса к математике;
- выявление уровня сформированности исследовательских компетенции после проведения экспериментального обучения и сравнительный анализ результатов;
- на основе проведенного педагогического эксперимента проверить достоинство предлагаемой методики.

В процессе этапа констатирующего эксперимента было намечено выполнение следующих целей:

- выявление общеметодологических и теоретических основ проблемы исследования;
- определено состояние использования исследовательских методов учителями математики в процессе обучения;
- изучено состояние сформированности исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов в общеобразовательных школах;
- обосновано влияние сформированности исследовательских компетенций в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов на умения решать алгебраические задачи и на качество математической подготовки в целом.

Для решения поставленной задачи в эксперементе исползовался комплекс методов педагогико – методических исследований: включёное наблюдение в естественных условиях образовательного процесса в средней школе, экспертная оценка, анкетирование, тестирование, беседа интервью, анализ продуктов исследовательской деятельности учащихся и самооценка.

Результаты констатирущего этапа эксперемента помогли нам определить направления поиского эксперимента: определить состав и структуру исследовательских компетенций и найти или создать дидактические средства, направленные на формирование у учащихся исследовательских компетенции в условиях обычного обучения алгебре в 7 – 9 классах.

На втором этапе наблюдения за процессом обучения алгебре в 7-9 классах, проводились беседы с учителями и учащимися, анкетирование, коректировка объекта, предмет, цель, задачи исследования, конкретировалась гипотеза настоящего исследования, разрабатывались методические приемы формирования исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения решению алгебраических задач.

Анализ результатов анкетирования показал, что:

1. Многие учителя (63%) воспринимают формирование у учащихся исследовательских компетенций в процессе обучения алгебре 7-9 классов, как одну из особо важных целей, из которых 16% учителей не видят важности в формировании исследовательских компетенций у всех учащихся, так как считают, что слабый ученик не сможет решить задачи исследователького характера, более того, такие компетенции ему не нужны. 33% учителей не считают формирование исследовательских компетенций первостепенной задачей.

2. Формирование исследовательских компетенций учителя признают равноценным к формированию исследовательских умений; 6% учителей постоянно и целесообразно формируют подобные умения на уроке, используя исследовательские задачи; лишь 55% очень редко уделяют внимание формированию исследовательских умений на уроках; 39% учителей совсем не обращают внимание на такой вид деятельности, по причине нехватки времени и необходимых методических и дидактических пособий.

3. Для обучения решению задач 85% учителей предпочитают организовать фронтальную и индивидуальную учебную деятельности; лишь 15% учителей организовывают групповую учебную деятельность учащихся по решению задач.

4. В качестве средств дифореренциации все учителя отметили использование разноуровневых задач по алгебре 7-9 классов.

Анализ наблюдения за ходом уроков алгебры и проведенное анкетирование позволили сделать вывод, что учителя, не понимая актуальности и важности формирования исследовательских компетенций, не проводят систематически и целенаправленно такую работу, ссылаясь при этом на отсутствие в учебниках соответствующих исследовательских задач.

Одновременно было также проведено анкетирование учащихся 7-9 классов (58 учеников) с целью определения их отношения к алгебре.

Приводим образец анкетированиея для учащихся

1. Уроки алгебры скучны и неинтересны.

а) да;

б) нет;

2. Решени задач по алгебре мне нравится:

а) традиционные, связанные с определенным алгоритмом.

б) исследовательские;

в) нестандартные;

г) с практическим содержанием;

3. Вы решаете задачи для того, чтобы:

а) заставляет учитель;

б) по требованию;

в) чтобы получить хорошую отметку;

г) чтобы решить быстрее других;

д) сам процесс решения интересен мне;

е) мне доставляет удовольствие преодолевать трудности;

ж) я наслаждаюсь успешным решением;

з) хочу найти способ решения.

4. Что очень важно для вас в процессе решения?

а) быстрое решение задачи;

б) много решеных задач;

в) оргинальность решения;

г) когда сам решаю задачи;

д) когда последовательно и наглядно решаю;

5. Какие задачи любите Вы решать?

а) простые;

б) с непонятными условиями;

в) головоломки;

г) повышенной трудности, для которых необходим длительный поиск решения;

д) с нехваткой данных;

е) без разницы.

6. Какой подход к работе над задачей больше всего Вам нравится?

а) полное объеснение процесса решения учителем;

б) разбор условия с одноклассыком;

в) коллективный поиск решения;

г) самостоятельное решение.

7. Хочеться ли вам заниматься решением задачи исследовательского характера?

а) да

б) нет

в) решением таких задач я занимаюсь;

г) такие задачи я знаю;

д) свой ответ.

Результаты анкетирования убедили нас в том, что интерес учащихся к алгебре проявляется в решении творческих задач (61% учащихся), в групповой работе по решению задач (71% учащихся), 39% учащихся 7-9 классов отметили, что хотели бы заниматься решением исследовательских задач по алгебре. Однако многие учащиеся указали на то, что учителя очень редко используют такие задачи и почти не проводят групповую работу на уроке.

Задачи формирующего эксперимента заключались в определении системы и содержании исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов. Цель данного этапа эксперимента заключалась в решении следующих задач:

- установление сущности понятия исследовательских компетенций;
- определение содержания и исследовательских компетенций учащихся при обучении алгебре 7-9 классов;
- раскрытие возможностей курса алгебры 7-9 классов с целью формирования исследовательских компетенций учащихся;
- разработка путей и поиск средств целенаправленного формирования исследовательских компетенций учащихся при обучении алгебре 7-9 классов;
- составление системы упражнений по алгебре и разработке эвристических приемов и предписаний по их решению.

Третий этап эксперимента (контрольный) проводился в (2018-2019г). Им было охвачено 54 учащихся 7-9 классов средней общеобразовательной школы №17 (28 учащихся) и средней общеобразовательной школы №1 (26 учащихся) Матчинского района.

Цель эксперимента заключалась в проверке эффективности разработанной методики, которая должна быть выражена увеличением уровня сформированности исследовательских компетенций у учащихся 7-9 классов.

На первом этапе констатирующего эксперимента, с целью определения уровня сформированности исследовательских компетенций учащихся была проведена контрольная работа по алгебре, состоящая из 5 задач. Статическая обработка уровня сформированности умений, входящих в состав исследовательских компетенций организационного, рефлексивного блоков, проводилась по результатам решения, соответственно, из 4 и 5 задач контрольной работы. Решение задач оценивалось от 1 до 5 баллов, соответственно принятым критериям на основе уровней сформированности исследовательских компетенций:

Рассмотрение операционного состава исследовательских компетенций позволили выявить следующие уровни: низкий; средний; высокий;

Приводим характеристику и содержание этих уровней.

I. Низкий.- Выполняет условие и требование задачи:

- устанавливает связи между объектами задачи и их свойствами, используя различные виды помощи;
- составляет обратную задачу к данной, пользуясь эвристическими приемами.

II. Средний:

- самостоятельно устанавливает связи между объектами задачи и их свойствами;
- сводит задачу к простым задачам;
- предлагает и доказывает гипотезу, используя различные виды помощи;
- оценивает, верно ли утверждение, верно ли решение задачи;
- рассматривает 1-2 частных случая при решении задачи;
- составляет обратную задачу к данной;
- составляет новые задачи на основе данной.

III. Высокий:

- вводит дополнительный элемент, который в ходе решения задачи сокращается;
- находит недостающие данные для достижения в поставленной задаче цели;
- выдвигает предположения (гипотезу) и находит пути его обоснования;
- формулирует подзадачу, которая в дальнейшем может быть использована при решении других задач;
- находит различные способы решения задачи и выделяет наиболее рациональные;
- обобщает и конкретизирует задачу;

- составляет новые задачи.

Таким образом, комплексный подход к анализу уровней сформированных исследовательских компетенций позволил распределить учащихся $7^{А}$ класса средней школы №14 по следующим группам: 7 учеников попали в группу высокого уровня, 7- в группу среднего уровня, 14-в группу низкого уровня.

Подобной методики дифференциации придерживались и остальные учителя, участвовавшие в педагогическом эксперименте. В целях коррекции деления на группы идентичных по уровням в $7^{А}$ и $7^{Б}$ классах была проведена промежуточная оценка качества знаний и умений за 6.

Ниже приводим текст одного из вариантов контрольной работы №1.

Данные полученные при выполнении группами контрольной работы №1 по уровням:

Группы по уровням	Кол-во уч-ся $7^{А}$	Выполнили задание на					СИК %	Кол-во уч-ся $7^{Б}$	Выполнили задание на					
		5	4	3	2	Качество %			5	4	3	2	Качество %	СИК %
Высокий	7	5	2	-	-	100	25,0% В	7	4	3	-	-	100	27,0%
Средний	7	2	4	1	-	85,7	25,0% С	5	1	4	-	-	100	19,2%
Низкий	14	-	1	7	6	7,1	50,0%	14	-	1	8	4	14,2	53,8%
Итого	28	7	7	8	6	50,0		26	5	9	8	4	53,8	6

Статическая обработка данных по всем контрольным работам выставлялась с учетом уровней обученности: запоминание, понимание, наличие навыка (применение знаний в практической деятельности) и переноса знаний в новые незнакомые ситуации.

Отметим, что в таблицах степень обученности выявлялась только с учетом критериев положительных оценок («5», «4», «3»). По согласованию с учителями математики $7^{А}$ класса определи качество экспериментального, 7А, 7Б класс - контрольный. Вместе с тем, при окончательном разбиении учащихся 7А и 7Б классов на группы учитывались следующие предложения учителей:

- учащиеся, получившие «5» и «4», но имеющие годовую оценку «5» отнесены к группе высокого уровня;

- учащиеся, получившие оценку «4» и «3», но имеющие годовую оценку «4» отнесены к группе среднего уровня;

- учащиеся, получившие «4», «3», «2», но имеющие годовую оценку «3» отнесены к группе низкого уровня.

Например, при обобщающем повторении формул сокращенного умножения давались задания на вычисление значений выражения в следующих 3- вариантах: (в дальнейшем, мы будем применять условные обозначения заданий для группы низкого уровня – Н; для группы среднего уровня – С; для группы высоком уровня – В).

Н-1. Найдите значение выражения $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2$при x=1,5, y=2.

Указание:

1. Детально анализируйте заданное выражение, применяя тот факт, что $8x^3 = (2x)^3$, а $12x^2y = 3 \cdot (2x)^2 \cdot y$.
2. Определите сходство и различие с аналогичными формулами возведения двучленов в степень.
3. Проверьте правильность полученной формулы (Алгебра 7 класса с. 153. № 493).
4. Вместо переменных подставьте значения в исходном и полученном выражении и найдите их числовые значения.
5. Если числовые значения исходного и полученного выражений не различны, то это означает, что в преобразованиях или вычислениях допущены ошибки.
6. Если ошиблись, то вернитесь к поиску своей ошибки и, исправив ее, продолжайте решение до завершения задания.

С-1. Вычислите значение выражения $\frac{x^3-3x^2y+3xy^2+5}{(x-y)^2-3}$

при $x = 3{,}7$; $y = 1{,}7$ двумя путями. Найдите наиболее удобный путь вычисления данного выражения.

В-1. Определите значение выражения наиболее удобным приемом.

$(27x^3 - 36x^2 z)$: $(56xz^2 - 27z^3) - (45x^2 \cdot z - 25x \cdot z^2)$, при $x = -2$; $z = \frac{2}{3}$.

Школьники среднего и высокого уровня получают поддержку в отдельности, и учитель отмечает полностью возникшие затруднения. А учащиеся низкого уровня выполняют задания в соответствии с письменными указаниями, т.е. работают по предложенному учителям алгоритму. В такой ситуации учитель работает над формированием алгоритмической деятельности в группе низкого уровня, формируя навыки преобразования выражений с использованием ряда формул сокращенного умножения, и освобождает время для оказания устной помощи учащимся групп среднего и высокого уровней.

Аналогическая работа проводилась со следующими заданиями:

Н-2. Решите уравнение $8x(1 + 2x) - (4x - 3)(4x + 3) = 2x$.

Указание:

1. Преобразуйте сначала левую часть уравнения, используя распределительный закон умножения относительно сложения, и заменив произведение двух членов $(4x - 3) \cdot (4x + 3)$ соответствующим многочленом второй степени.
2. Приведите подобные члены, а затем, пользуясь теоремами о равносильности уравнений, преобразуйте это уравнение.
3. Найдите корни x из полученного уравнения.
4. Найдите такое значение x в данном уравнении, которое обращается в верное равенство.

С-2. Решите уравнение $x - 2x(1 + 4x) - 8x2 = (3 - 4x) \cdot (4x + 3)$ и проверьте найденное решение.

В-2. Проверьте наиболее рациональным способом, какое из следующих чисел: 1;-0,5; 1,8; -2,7 принадлежит множеству решений уравнения

$$\left(1+\frac{x+1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{x+1}{3}\right)+\frac{(x+1)^2}{9}=x-\frac{3x+1}{8}$$

Постепенному обучению преобразованиям выражений были предложены такие задания:

Н-3. Доказать, что выражение при произвольных значениях x $(2x-3)^3$+$(5-2x)^3$$-24x2+134x-3$ делится на 19.

Указание:

1. Применяя формулу куба разности, раскройте скобки
2. Приведите подобные члены
3. Полученное выражение разложите на множители
4. Проверьте наличие делителя 19 среди множителей разложенного выражения? Сделайте вывод.

С-3. Разложите выражение $(2x-3)^3+(5-2x)^3-24x\,(x-4)-3$ на множители и покажите, что оно делится на 5 и на 19.

В-3. Докажите, что значение выражения $[(a-3c)(4c+2a)+3c\,(a+3c)+(c-2a)(3c+5a)-5a^2$+39]: (3-$a^2$) при любых значениях «а» и «с» кроме a = √3 есть целое число.

Подобные задания составлены для учителей, участвовавших в педагогическом эксперименте. По предложению учителей, абсолютное многие предложенные задачи дают возможность им на занятиях алгебры вести конкретную работу по формированию исследовательских компетенций.

По завершению этой работы по теме «Формулы сокращенного умножения» был проведен диагностический срез (контрольная работа $№=2$) (по тематике №7).

Контрольная работа №2

1. Разложите многочлен на множители:

а) $4x^2+8x$

б) $3m-6n+mn-2n^2$

в) $9a^2-16$

г) y^3+18y^2+81y

д) x^3+27

2. Решите уравнение $x^3-36x=0$

3. Преобразуйте выражение

$(2a-в)^2+(a^2+в)(2a-b)$ в многочлен стандартного вида и разложите его на множители.

4. Вычислите наиболее рациональным способом:

$\frac{169^2+59^2}{228}-169\cdot 59$

5. Постройте в системе координат x О y графиклиненной функции $y=2ax-a^2$, если известно, что он проходит через точку (1; -3) и пересекает ось X левее начала координат. Чему равно значение a?

Коррекционная проверка, проведенная в контрольном и экспериментальном классе, свидетельствовала о том, что пути поиска учениками решений предложенных заданий в экспериментальном классе выбирались осознанно, начиная с анализа частей выражения, зная о существовании алгоритма упрощения выражения. В контрольном же классе даже хорошо успевающие школьники иногда достигали цели не удобным путем, а путем проб и ошибок и, тем самым, теряя время на поиск решения, не всегда успевали сделать правильные выводы.

Результаты контрольной работы №2 отражены в таблице:

Таблица №2

Группы по уровням	Количество 72-ая 7А	Выполнили задания на						Количество	Задание выполнили на					
		5	4	3	2	Качество % учащихся 7Б	С.И.К %		5	4	3	2	Качество %	С.И.К. %
Высокий	7	6	1	-	-	100	25.0%	7	5	2	-	-	100	27.0%
Средней	7	2	4	1	-	85,7	25.0.%	5	4	1	-	-	80,0	19.2 %
Низкий	14	-	3	7	4	28,5	50.0%	14	-	4	6	4	28,6	53.8
Итого	28	8	8	8	4	57,1		26	9	7	6	4	61,5	

С первых дней эксперимента успеваемость контрольной работы №1 в 7Б классе были выше, чем в 7А классе. Однако разница между результатами контрольной работы №1 и №2 в экспериментальном классе несколько лучше и тем самым уже первая проверка показала более высокий рост качества в экспериментальном классе. Следовательно, в данный момент этот срез доказал важность однообразия формулировок заданий и их проблемности. Считаем, что требования «обосновать», «доказать», «определить при каких условиях» и т.д. дают возможность лучше раскрыть компетенции школьников в проведении ежедневных исследований и пробуждают активную самостоятельную аргументацию обоснованных выводов и цели задания. Уместно также подчеркнуть, что группа низкого уровня почти полностью сократилась, что является сигналом необходимости пристального внимания и оказания методической помощи этой группе учащихся. Тогда, в дальнейшей работе, уделено внимание формированию умений при составлении алгоритмов действий и выработке навыков пользования ими и у слабых учеников.

Подобная забота с этими же учащимися проводилась в 8 классе. Например, при изучении свойств числовых неравенств предлагались задания в группах соответствующих уровней.

Н-4. «Известно, что $a>в$ на 2. Расположите в порядке возрастания числа: а+5; а+1; в-1; в-4; а; в; в+4; а-2,5».

Указание:

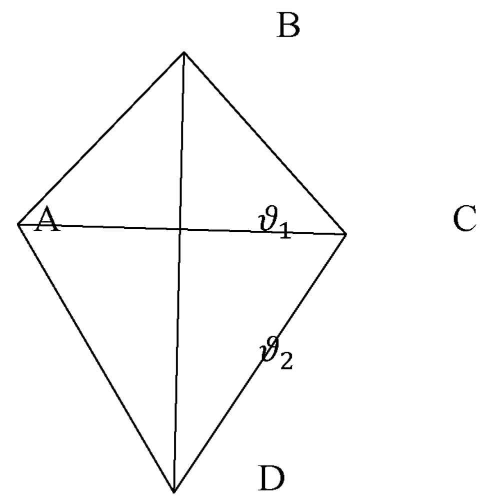
1. Используя условие, отметьте на числовой прямой a и $в$.
2. Выбрав единичный отрезок, расположите сначала числа: a+1; a+5;
3. Подобно предыдущим расположите числа: $в$-1; $в$-4; a-2,5; $в$+4.
4. Напишите результат расположения указанных чисел с помощью символов неравенств, приступая с самого меньшего или большего числа.

С-4. «Зная, что $a >в$, сравните числа: 3+a и $в$+1; $в$-8 и a; -a и 8-$в$; $\frac{a}{6}$ и $\frac{в}{7}$».

В-4. «Зная, что a>$в$ >0, обоснуйте результат сравнения чисел: 12a и 10$в$; 6a и $в$; -15 a и -14 $в$; - $\frac{a}{3}$ и - $\frac{в}{4}$; $\frac{2}{a}$ $и$ $\frac{3}{в}$».

При появлении трудностей у учащихся соответствующих групп учитель предлагает дополнительную помощь, наводящую их к правильному умозаключению.

В качестве дополнительного задания на дом для групп высокого и среднего уровня давалась следующая задача: «Дан выпуклый четырёхугольник с периметром 18 см. В нем проведены диагонали. Найдите, в каких промежутках может изменяться сумма длины диагоналей, если периметр четырехугольника не меняется» с указанием использовать знания о неравенства треугольника и зависимости между его сторонами.



Данная задача вызвала живой интерес у учащихся и они проверяли умозаключения товарищей еще до начало следующего урока, поэтому учитель попросил предварительно записать одно из найденных решений, чтобы все учащиеся заметили логику умозаключений при ее решении и написали ответ в виде неравенства 9< d_1+d_2<18.

По окончании обучения теме, свойства числовых неравенств, с оказанием помощи в необходимых случаях, проведем контрольную работу №3, образец вариантов которой опишем ниже:

Контрольная работа №3.

1. Известно, что a>5 и $в$> $7. Верно\ ли, что\ a+в>7?$
2. $Дано, что\ a>4\ и-в\ <-2. Верно\ ли, что: а)\ a+в>5?; б)\ ав>5?.$
3. $Докажите, что: а)\ если\ a>8\ и\ в\ \geq 2, то\ 2a+в>18.$

$$б)\ a>4\ и\ в\ \leq -2, то\ 3a-4в>15.$$

4. Сравните; а) $в$-3a и 0; если $a>8\ и\ в\ <6;$

$$б)-(a-2в) и-3, если\ a>8\ и\ в>-2.$$

5. Для каких числовых значений x и y верно неравенство $x^2+y^2>$ $2\ (x+y-1).$

Данные контрольной работы №3 отражены в таблице №3.

Таблица 3

Группы по уровням	Количество уч-ся 8А кл.	Выполнили задание на					С.И.К %	Количество уч-ся 8Б кл.	Выполнили задание на					
		5	4	3	2	Качество %			5	4	3	2	Качество %	С.И.К. %
Высокий	7	6	1	-	-	100	28,6%	7	6	1	-	-	100	27,0%
Средней	9	5	4	-	-	100	35,7%	5	-	5	-	-	100	19,2%
Низкий	12	-	3	6	3	25,0	35,7%	14	-	3	8	3	42,8	56,8%
Итого	28	11	8	6	3	67,1		26	6	9	8	3	57,1	

В процессе продолжительной работы с подобно разработанными экспериментальными заданиями, почти по всем темам курса алгебры 8 класса, было установлено, что к концу 2-го года эксперимента учащиеся групп среднего и высокого уровня стали меньше нуждаться в методической помощи, а результат итоговой контрольной работы по алгебре в экспериментальном 8-А классе превзошёл результаты контрольного 8-Б класса.

Теперь предлагаем содержание последней контрольной работы по алгебре (№4) (по тематике №9)

Контрольная работа №4.

1. Решите неравенство:

а) $9x-11 > 5(2x-3)$;

б) $x^2+7x-8 \geq 0$

2. При каких значениях параметра p уравнение $p \cdot x^2 - 2px + 9 = 0$ имеет два корня?
3. Найдите область определения функции

$$У=\sqrt{7-2x^2}+\frac{2x+3}{9-4x}$$

4. Докажите, что при любых знаниях переменной выполняется неравенство $\frac{6\sqrt{y^2+3}}{y^2+12} \leq 1$

Из пункта А по течению реки спустили плот. Через 5 часов 20 минут вслед за ним из того же пункта вышла моторная лодка, которая догнала плот на расстоянии 20 км от А. Какова скорость течения реки, если скорость моторной лодки на 12км/ч больше скорости плота?

Таблица №4.

Группы по уровням	Количество уч-ся 8А кл.	Выполнили задание на					С.И.К %	Количество уч-ся 8Б кл.	Выполнили задание на					
		5	4	3	2	Качество %			5	4	3	2	Качество %	С.И.К. %
Высокий	8	7	1	-	-	100	28,6%	7	6	1	-	-	100	27,0%
Средней	10	6	4	-	-	100	35,7%	6	4	0	-	-	83,3	23,0%
Низкий	10	-	4	6	-	40%	35,7%	13	-	3	8	2	23,0	50,0%
Итого	28	13	9	6	-	78,5		26	6	6	8	2	61,5	

Приводим в конце эксперимента контрольной работы по девятому классу контрольную работу №5

Контрольная работа №5 (по тематике №7).

1. Определите девятый член геометрической прогрессии 3;6;12;...
2. Определите сумму первых четырнадцати членов арифметической погрессии 30; 20; 26; ...
3. Является ли число 242 членом арифметической прогрессии $a_n = = 7n+4$.

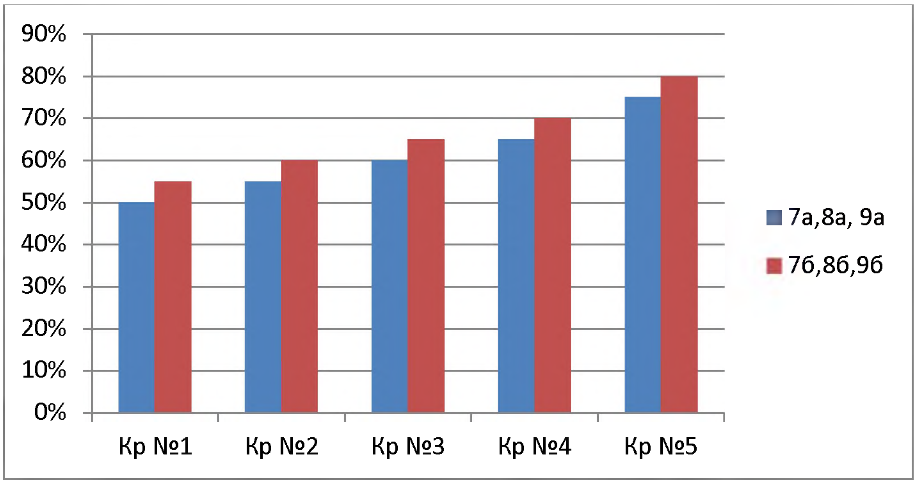
4. Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 16, а шестой ее член на 12 больше второго. Найдите разницу и первый член данной прогрессии.
5. Найдите все значения x при которых значения выражений x-4; $\sqrt{6x}$; x+12 являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

Таблица 5

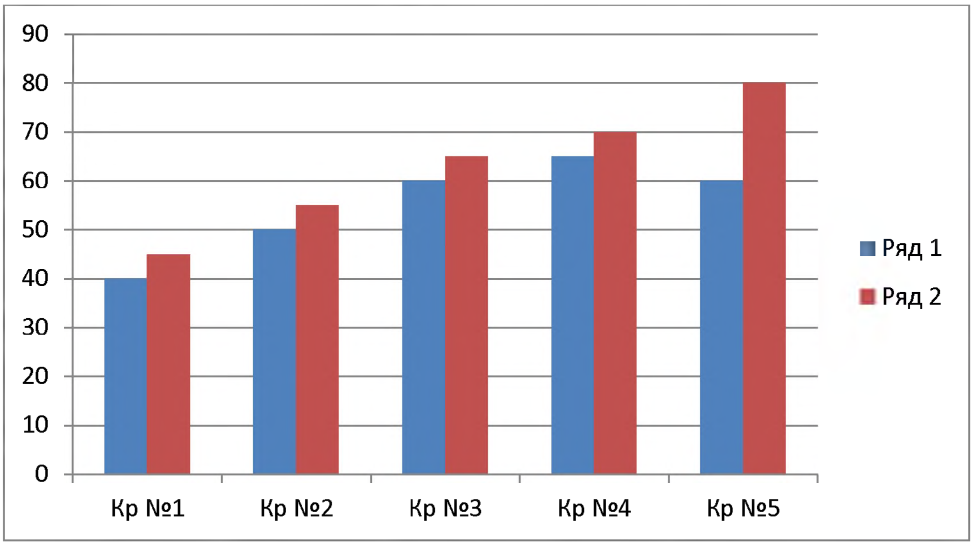
Группы по уровнялм	Количество уч-ся 8А кл.	Выполнили задание на					С.И.К %	Количество уч-ся 8Б кл.	Выполнили задание на					
		5	4	3	2	Качество %			5	4	3	2	Качество	С.И.К. %
Высокий	12	10	2	-	-	100	42,8%	7	5	2	-	-	100	26,0%
Средней	10	3	7	-	-	100	35,7%	7	-	5	1	-	85,7	26,0%
Низкий	6	-	-	6	-	66,6	21,4%	12	-	-	8	4	75,0	30,7%
Итого	28	13	9	6	-	78,5		26	5	8	9	4	57,8	

Сравнительная обработка данных контрольной работы №5 (таблица 5) и предыдущего среза по алгебре между собой и оценивание деятельности учащихся в учебном процессе (познавательная активность, обоснованность ответов, увлеченность предметом, проявление инициативности и интереса к исследовательской деятельности) отражены в следующих диаграммах, представляющих закономерности посменного повышения качества обучения алгебре 7–9 классов, включающих сформированность исследовательских компетенций.

Динамика качества обучения алгебре



Динамика сформированности исследовательских компетенции по алгебре в 7-9 классах



Очевидно, что экспериментальная работа по изучению и оценке процесса формирования исследовательских компетенций учащихся 7-9 классов с их дифференциацией по трем уровням математической подготовки свидетельствовала, что индивидуальные задания содержали проблемные задания исследовательского характера и сопровождались методической помощью учителю в форме письменных рекомендаций (для группы низкого уровня) и устной подсказки (в ходе выполнения задания учащимися групп высокого и среднего уровней) придают им силу в учебно-познавательной деятельности и пробуждают желание к исследовательской деятельности.

По завершению опыта, на уроках алгебры учащиеся групп высокого уровня (число таких учащихся в экспериментальном классе увеличилось на 5, в контрольном на 2, они были переедены в группу В) почти всегда попытали отыскать различные пути решения. Деятельность таких учащихся в этой ситуации имитирует деятельности настоящего исследователя, когда для решения сформулированной проблемы, необходимо сконцентрировать свои знания на решении этой проблемы. Особо следует отметить, что в эти моменты учащиеся отказывались от поддержки со стороны учителя, показывая свое «Я», настойчивость и желание самостоятельно дойти до истины.

Учителя, включившиеся в экспериментальную работу в школах города Истаравшан, подчеркивали важность увеличения самостоятельности учеников. Надо отметить, что ограниченность возможности присутствовать на всех уроках вне города Истаравшан, несколько снизила результаты формирующего эксперимента в школах гг. Истарафшан и Гулистан. Однако, несмотря на это сравнение показателей экспериментальных и контрольных классов, позволило дать оценку тому, что предложенная нами методика оказания методической помощи учащимся в ходе их поисковой деятельности дала ощутимый результат в формировании исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения алгебре 7-9 классов.

Результаты исследования свидетельствуют о том, что в данные обучения алгебре 7 – 9 классов по разработанной нами методике, основная масса учащихся экспериментального класса имеет средний и высокий уровень сформированности исследовательских компетенций, в то время как учащиеся контрольного класса имеют, в основном, низкий и средний уровень показателей подготовки к деятельности.

В результате проведенного диссертационного исследования было определено, что учащиеся экспериментального класса применяют исследовательские компетенции в более полном объеме, успешно используя исследовательские компетенции в процессе решения задачи повышенной трудности, а также отмечаются явное повышение интереса учащихся к изучению математике.

Таким образом, в ходе экспериментальной работы подтвердилась выдвинутая гипотеза исследования.

Выводы по второй главы

1. Для проверки эффективности предлагаемой методики, сконструированной на базе авторских концептуальных положений, осуществлялась опытно – экспериментальная работа по формированию исследовательских компетенции учащихся в процессе обучения алгебре 7 – 9 классах. Эксперимент включал в себя три этапа: констатирующий, формирующий и контрольный.

2. Эмпирическое изучение психолого – педагогических особенностей учащихся, диагностика исходного уровня сформированности исследовательских компетенций учащихся по алгебре в 7 – 9 классах, проведённые на констатирующем этапе с помощью системы методов педагогического исследования (наблюдение, анкетирования, экспертная оценка, тестирование, анализ результатов деятельности, анализ систематических данных) показали недостаточный уровень статических исследовательских компетенций у учащихся основной школы по математике.

3. Целенаправленная работа с учащихся экспериментальной классы на формирующем этапе осуществлялась на основе предложенной методики формирования исследовательских компетенций в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов в течение пятилетнего эксперимента по программе в

рамках «Алгебра 7 – 9» и «Задачи повышенной трудности по алгебре 7 – 9 классов».

4. Для формирования исследуемой проблемы у учащихся применялась специальная процедура, предполагающая исследовательское продвижение учащихся от низкого через средний к высокому уровню.

5. Итоговая оценка достигнутых учащимися результатов на контрольном этапе эксперимента проводилась на основе разработанной критериально - уровневой системы, представленной совокупностью процентной успеваемости качества знаний умений и навыков, степенью сформированности: низкого, среднего и высокого уровней.

6. Результаты проведённой опытно – экспериментальной работы в целом свидетельствуют о положительной закономерности формирования исследовательских компетенции учащихся: как влияет основа повышения самостоятельной математической деятельность на учащихся; на высших уровнях самостоятельной математической деятельности учащихся, проявляется в самостоятельном решении различных школьных математических задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе опытно – экспериментальной работы намеченные задачи исследования решены, подтверждена гипотеза и получены следующие результаты и выводы:

1. Определены структура и содержание исследовательских компетенций учащихся основной школы, которые проявись в методах исследования. Учащиеся научились видеть и вычленять такую деятельность, как разбиение задач на подзадачу и устанавливать структурное сходство внешне различных систем (задач); соотносить их со своим опытом и ценностями, придавая тем самым личностный смысл; уметь строить предположения о возможных причинах и последствиях явлений материального и идеального мира; выдвигать и обосновывать гипотезы; осуществлять индивидуальную и коллективную деятельность; ставить цель; анализировать ситуации; планировать, получать и практически реализовывать готовый продукт; осуществлять рефлексию своей деятельности: поведения и ценностей.

2. В процессе изучения и анализа исследовательской деятельности учащихся были выделены компоненты исследовательских компетенций.

3. Проанализирован курс алгебры 7 – 9 классов и показана их сущность и значение в формировании исследовательских компетенций учащихся.

4. Составлена система упражнений и методические рекомендации по их решению, направленные на формирование исследовательских компетенций.

5. Применение исследовательских компетенций во всех видах учебно – познавательной деятельности учащихся, повышают степень её самостоятельности; обеспечивают повышение качества алгебраических знаний, умений и навыков учащихся, также прочнее усваиваются знания, которые учащиеся получили самостоятельно, что ведет к продвижению их представлений о методах получения знаний.

6. Целенаправленная организация исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов способствует повышению познавательного интереса к математике и математической деятельности.

7. Систематическая реализация, разработанной нами методики, ориентированная на формирование исследовательских компетенций, способствует следующему:

- содержание изучаемого алгебраического материала обязательно будет освоена на достаточном уровне в процессе организации исследовательской деятельности;
- сформированные исследовательские компетенции относятся и внутри математической деятельности;
- идеальная роль в формировании исследовательской деятельности отводится специфическим исследовательским компетенциям;
- наивысший уровень сформированности исследовательских компетенций в процессе обучения алгебре 7 – 9 классов обеспечивает самостоятельность в решении алгебраических задач в целом.

8. Реализация получениях данных исследования в практической деятельности учителя математики общеобразовательных школ свидетельствует, что предлагаемая методика формирования исследовательских компетенций в процессе обучения учащихся алгебре в 7 – 9 классах, способствует повышению качества знаний, обеспечивает развитие творческого потенциала и помогает самостоятельно приобретать новые знания.

9. Данная исследовательская работа позволила создать много новых возможностей в теории и методике преподавания математики в общеобразовательной школе, нахождении рационального соответствия содержания математического учебного материала и метода преподавания, измеримости познавательных возможностей и интересов школьников за

счет применения исследовательских компетенций в процессе решения задачи повышенной трудности.

10. Поставленные задачи исследования решены, гипотеза подтверждена.

Перспективами по рассматриваемой в диссертации проблеме могут быть: выявление специфики соотношения ключевых, базовых и специальных компетентностей в контексте исследовательских компетенций; изучение специфики формирования исследовательских компетенций посредством информационных технологий; изучение возможности трансформаций при обучении решению алгебраический задач 7 – 9 классов на процесс обучения учащихся решению алгебраических задач в 10 – 11 классах; изучение специфики формирования исследовательских компетенций в условиях реализации идей преемственности изучения алгебры 7 – 9 классов и алгебры начала анализа 10 – 11 классов.

Библиографический список использованной литературы

1. Алгебра учебник для 7 классов средней школы \ А. Шарифзода Б. Алиев. Изд. 2. «Мир издателей». - Душанбе, 2011. -270с.
2. Алгебра учебник для 8 класса средней школы \ Б.Алиев. Изд. «Собириён». – Душанбе, 2009. -319с.
3. Алгебра учебник для 9 класса средней школы \ Н.Усмонов, Р. Пиров «Полиграфкомбинат». – Душанбе, 2013. -224с.
4. Алексеев Н. А. Личностно – ориентированное обучение: вопросы теории и практики: Монография – Тюмень: Изд-во ТГУ, 1996. -216с.
5. Алексеев С.В. Дифференциация в обучении предметам естественно – научного цикла: Методические рекомендации: - Л.: Изд-во ОТД, 1991, - 100с.
6. Акмеологическая оценка профессиональной компетентности государственных служащих учеб.пособ. \Под.общ.ред. А.А. Дерхача 2-е узд. М. РАГС. 2007-166с.
7. Ананьев Б.Г. Человек как предмет познания. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1968.-339с.
8. Андреев В. И. Диалектика воспитания и самовоспитания творческой личности. - Казань: Изд-во Казанского университета, 1988. -240с.
9. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно – исследовательской деятельности: Метод, пособие. – М.: Высш. школа, 1981. -240с.
10. Андриенко А.В. Динамика свойств личности в процессе приобщения к научно – исследовательской деятельности. \ Актуальные проблемы современной науки: Сб. науч. статей 5-й Международной конференции молодых ученых и студентов Ч. 34, - Самара: Сам ГТУ, 2004. - С.9-12
11. Асмус В.Ф. Проблемы интуиции в философии и математике. – М.: Просвещение, 1965. -67с.

12. Асмолов А.Г. Психология личности: культурно – историческое понимание развития человека [Текста] /А.Г.Асмолов.-«Академия», 2007. -528с.
13. Айсмоитас Б.Б. Теория обучения: Схемы и тесты – М., Изд-во: ВЛАДОС , 2002-176с.
14. Балл Г.А.О психологическом содержании понятия «задача»\\ Вопросы психологии. – 1970 - №6- С.75 – 85.
15. Балк Г.Д. – Применение эвристических приемов в школьном преподавании математики // Математика в школе. – 1969. - №5. – С.21 – 28.
16. Баранова Е.В., Зайкин М.И. Как увлечь школьников исследовательской деятельностью \\ Математика в школе. – 2004, - №2. – С.7.10.
17. Баранова Е.В. Методические основы использования учебных исследований при обучении геометрии в основной школе: Автореф. Дис…канд. пед.наук (13.00.02). – Саранск, 1999. – 18с.
18. Бабанский Ю.К. Как оптимизировать процесс обучения. М.: «Знание», 1978. -48с.
19. Беликов В.А. Личностная ориентация учебно-познавательной деятельности: дидактическая концепция. – Челябинск: Изд-во Факел, 1995. -41с.
20. Белухин Д А. Основы личностно ориентированной педагогики. Ч. 1. – М.: Институт практический психологии. – 1996. -192с.
21. Блехман И.И.Прикладная математика. Предмет, логика, особенности подходов (А.Н. УССР, Киев: «Науково – думка»). – 1976. -108 с.
22. Бердяев Н.А. О человеке, его свободе и духовности: Избранные труды \ Ред. – сост. Л.И. Навикова, И.Н. Сиземская- М.: Моск. псих-соц.ин-т Флинта, 1999. – 311с.
23. Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии, - М.: Педагогика, 1989. -192с.

24. Болтянский В.Г. – Глейзер Г.Д. Проблемы дифференциации школьного образования. // Математика в школе. 1988. - №32.
25. Боженкова Л.И. Скарбич С.Н. Роль задач с избыточными и недостающими данными в личностном развитии ученика \\ Проблемы естественно научного и математического образования: Материалы VII межвузовской научно-практической конференции по проблемам педагогической инноватики. – Тобольск: Изд-во ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 2002. -С. 139-141.
26. Боженкова Л.И., Скарбич С. Н. Задачи в личностно-ориентированном обучении планиметрии \\ Актуальные проблемы современной науки: Тезисы докладов II Международной конференции молодых ученых и студентов. Ч. 8. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2001. – С. 22.
27. Божович Л.И. Личность и ее формирование в детском возрасте- М.: Просвещение, 1968. - 464с.
28. Большая Советская энциклопедия. Т.9 – М: Советская энциклопедия – 1972. -624с.
29. Большой англо-русский словарь: 250 000слов и словосочетаний В. К. Мюллер, А.Б. Шевнин Екатеринбург: У - Фактория, 2007. -1536 с.
30. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе – М.: Учпедгиз, 1954. -504с.
31. Брунер Д. Процесс обучения. – М: Изд-во АННРСФСР, 1962. – 84с.
32. Брунер Д. Психология познания: за переделами непосредственной информации – М.: Просвещение, 1977. -412 с.
33. БСЭ: в 30т. Под.ред. А.М. Прохорова, 3-е изд. -М.: Сов.Энцикл, 1969- - 1978 г.
34. Брушлинский А.В. Психология мышления и проблемное обучение. - М.: Знание, 1983. – 96с.
35. Бухвалов В. А. Развитие учащихся в процессе творчества и сотрудничества. - М.: Центр «Педагогический поиск», 2000. -144с.

36. Василевский А.Б. Обучение решению задач по математике: Учеб. пособие для пед. ин-тов. – М.: Высш. школа, 1988. - 256с.
37. Векслер С. И. Современные требования к уроку. - М: Просвещение, 1985. -128с.
38. Викол Б.В. Формирование элементов исследовательской деятельности при углубленном изучении математики. Дисс.канд.пед.наук. - М., 1977. - 200 с.
39. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе. Учеб. Пособие. - Ростов на Дону: Изд-во Феникс, 2005. -252с.
40. Виноградова Л.В. Развитие мышления учащихся при обучении математике. - Петрозаводск: Изд-во «Карелия», 1989. - 176с.
41. Возняк Г.М. Прикладные задачи в мотивации обучения \\ Математика в школе. – 1990. - №2. -С.9-11.
42. Волхопский А.И. К методике обучения решению задач \\ Математика в школе. – 1973. -№5. – С.42-44.
43. Выготский Л.С. Педагогическая психология\ Под. Ред. В.В. Давыдова. – М.: Педагогика, 1991. -480с.
44. Выготский Л.С. Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте \\ Хрестоматия по психологии: Учеб. пособие для студентов Пед. ин-тов \ Сост. В.В.Мироненко; под.ред. А.В. Петровского - М.: Просвещение, 1987. - С.377-383.
45. Гальперин П.Я. Организация умственной деятельности и эффективности учения \\ Возрастная педагогическая психология. – Пермь, 1971. -С. 32-59.
46. Ганеев Х.Ж. Пути реализации развивающего обучения математике: Учеб. Пособие. – Екатеринбург: Изд-во УГПУ, 1997. -102с.
47. Гейбука С.В. Подготовка будущих учителей математики к формированию исследовательской деятельности школьников (на примере курса алгебры): Автореф. дис. …канд. пед. Наук (13.00.02).- Новосибирск, 2005. -18с.

48. Герд А.Я. Избранные педагогический труды \ Под.ред.Б.Е. Райкова. – М.: изд-во Акад.пед.наук РСФСР, 1953. -208с.
49. Глухова М.И. Формирование творческой самостоятельности школьников при обучении геометрии в классах с углубленным изучением математики. Дис… докт.физ.мат.наук, - Пермь. -2007
50. Горина О.П. Проблемные задания как средство организации развивающего обучения математике в 5-6 кл. Автореф. дис.. …канд..пед..наук (13.00.02). – Москва, 2002. -18с.
51. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. – М.: Просвещение, 1977. -136с.
52. Губа С.Г. Развитие у учащихся интереса к поиску и исследованию математических закономерностей \\ Математика в школе. – 1972. -№3. – С.19-23.
53. Гурова Л.Л. Психологический анализ решения задач. – Воронеж. Университет. – Воронеж, 1976. – 328с.
54. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике: - М.: ООО Изд-во «Вербум - М», Изд. центр «Академия», 2003. - 432с.
55. Грук Ф.Ю. Формирование ключевых компетенции учащихся основной школы при организации исследовательских лаборатории на базе реального физического эксперимента: Дисс.канд.пед.наук (13.00.02). -М., МГПУ, - 2008. -178.
56. Гнеденко Б.В. – Математическое творчество. // Математика в школе. – 1979. - №6. – 16с.
57. Далингер В. А., Павлова Е. Ф. Технология развивающего обучения математике учащихся начальных классов: Книга для учителя, - Омек: Изд-во ОмГПУ, - Омск, 1998. – 108с.
58. Далингер В. А. Поисково – исследовательская деятельность учащихся по математике: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2005, - 456с.

59. Далингер В. А. Чертеж учит думать \\ Математика в школе. – №4, - Омск, 1990. - С. 32-36.
60. Далингер В. А., Толпекина Н. В. Организация и содержание поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике: Учебное пособие. - Омск: Изд-во ОмГПУ, 2004. -263с.
61. Данилов М.А., Есипов Б.П. Дидактика. – М.: Изд-во АПН РСФСР 1967. -516с.
62. Данилова Е.Ф. Как помочь учащимся находить путь к решению геометрических задач, - М.: Учпедгиз, 1961. – 144с.
63. Дистерверг А. Избранные педагогические сочинения. - М.: Учпед-гиз, 1956. -384с.
64. Долгова Л.М. Современные подходы к компетентностно-ориентированному образованию. \ Материалы семинара; под ред. А.В. Великановой. - Самара: Изд-во Профи, 2001. -61с.
65. Дьяченко Г.М. Компетентностный подход к формированию логической культуры учащихся в процессе обучения информатике: Автореф. дис…канд. пед. Наук (13.00.02). – Омск, 2005. -22с.
66. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. -128с.
67. Задачи по обучению математике. Методические рекомендации для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов и учителей математики сред.школ.\Сост. В.А. Далингер.- Омск: ОмГПУ, 1990. -43с.
68. Зайкин М.И Провоцирующие задачи. \\ Математика в школе. – 1997. - №6. -с.32-36.
69. Зарипова Е.И. Становление социальной компетентности школьников в условиях региональной образовательной среды: Дис. канд. пед. наук (13.00.01).- Омск, 2005. -217с.
70. Занков Л.В.- Дидактика и жизнь /Л.В.Занков.-М.: Просвещение, 1968. – 176с.

71. Зверева Н.М. Практическая дидактика для учителя: учеб. пособие. - М.: Педагог. общество России, 2001. -256с.
72. Зимняя И.А. Педагогическая психология: Учебник для вузов. – М.: Логос, 2003. -384с.
73. Зубов С.И. Дифференциация самостоятельных работ учащихся (на материале преподавания истории и географии в 8-10 классах средней школы): Автореф. дис. … канд. пед. наук (13.00.02). – М., 1976. -19с.
74. Зинченко В.П. О целях и ценностях образования. Изд.: Педагогика. – 1977. - №5. -С.3-16.
75. Иванов Д.А., Митрофанов К.Г., Соколова О.В. Компетентностный подход в образовании. Проблемы, понятия, инструментарий: Учебно-метод. пособие. - Омск: Изд-во ОмГПУ, 2003. -101с.
76. Иванова Т.А. Учебно–исследовательская деятельность как компонент гуманитарного ориентированного содержания математического образования.\ Проблемы реализации творческого потенциала личности в процессе обучения математике: Межвузовский сб. науч. – метод. трудов. – Екатеринбург: НУДО «Межотраслевой региональный центр», 2000. -С.164-167.
77. Изард К. Е. Психология эмоций. – СПб: Питер, 1999. – 464с.
78. Ильясов И.И. Система эвристических приемов решения задач: Учеб. пособие для студентов, - М.: Учебно-метод. коллектор «Психология» 2001. -154с.
79. Иодко А.К. Формирование у учащихся умений исследовательской деятельности в процессе обучения химии. Автореф. дисс. …канд.пед.наук. - М., 1983.
80. Калилина О.Л. Включение подростков в исследовательскую деятельность по математике как условия формирование у них готовности к развитию своего творческого потенциала \\ Межвузовский сб. наук. – метод. трудов.- Екатеринбург: изд-во АОЗТ «Полиграфиг», 2000. -164с.

81. Кальней В.Н., Шишов С.Е. Мониторинг качества образования в школе. – М.: Педагогическое общество Росии, 1999. -354с.
82. Камю А. Избранные произведения \ Пер.с. фр. С.И. Великовского, - М: Панорама, 1993. -446с.
83. Капии Е.С. Развитие темы задачи \\ Математика в школе. – 1991, -№3, -С. 8-12.
84. Каптерев \Антология гуманной педагогики: Сост. П.А.Лебедев. – М.: изд. Д. Амонашвили, 2001. -223с.
85. Кирсанов А.А. Педагогические основы индивидуализации учебной деятельности учащихся. Дисс…докт.пед.наук.-Казань,1982.
86. Клименченко Д.В. Воспитывать исследовательские навыки \\ Математика в школе, -1972. - №3. - С.26-27.
87. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике: Ч.I Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. - М.: Просвещение, 1977. -110с.
88. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике: Ч.II: Обучение математике через задачи и обучение решению задач. – М.: Просвещение, 1977. -144с.
89. Колягин Ю.М. Функции задач в обучении математике \\ Вопросы обучения и воспитания. – Ч. 2 – Томск: изд-во АПО, 1975. – С.162 – 170.
90. Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения в 2-х томах. – Т.1. \ Под.ред. А.И. Пискунова и др.. ; Сост. Э.Д. Днепров и др. – М.: Педагогика, 1982. -656с.
91. Коменский Я.А. Избранные педагогический сочинения : В.2 т. Т.2. \ Под.ред. А.И. Пискунова и др.. ; Сост. Э.Д. Днепров и др. – М.: Педагогика, 1982. – 576с.
92. Компетентностный подход в педагогическом образовании: Коллективная монография \ Под ред. проф. В.А. Козырева и проф. Н.Ф. Родионовой. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2004.-392с.

93. Крыговская А.С. Развитие математической деятельности учащихся и роль задач в этом развитии \\ Математика в школе. – 1966. -№6. -С.19-30.
94. Кузнецов А.В. Исследование математических зависимостей с использованием компьютера при изучении алгебры в старших классах: Автореф. дис. … канд. пед.наук (13.00.02). – Орел, 2005. -18с.
95. Кузнецов А.В. Личностно– ориентированный подход к современному уроку (Учебное пособие для студентов высших учебных заведений, слушателей учреждений дополнительного педагогического образования). – Хабаровск: Изд-во ХК ИППК ПК, 2001. -94с.
96. Кузнецова Ю.А. Формирование поисковой деятельности в обучении математике учащихся 1-6 классов: Автореф. дис. .. канд. пед. наук (13.00.02). – Саранск, 2005. -18с.
97. Кульневич С. В. Педагогика личности от концепции до технологий \ Учеб. – практич. пособие для учителей и классных руковод., студ., магистр., аспирантов. пед. учеб. заведений, слушателей ИПК. – Ростов – на – Дону: Творческий центр «Учитель», 2001. -160с.
98. Кулюткин Ю. Н. Эвристические методы в структуре решений. – М.: Педагогика, 1970. -226с.
99. Кярск М. Рассмотрение компетентности в психологической концепции совершенствования управления производством организации \\ Актуальные проблемы психологии труда. – Тарту, 1980. – С. 45-67.
100. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособ. для студ. физ. – мат. спец. пед. ин – тов \ Под ред. Е. И. Ляшенко. – М.: Просвещение, 1988. – 222с.

101. Ларькина Е. В. Методика формирования элементов исследовательской деятельности учащихся основной школы на уроках геометрии: Автореф. дис….канд.пед.наук (13.00.02). – М., 1996 -16с.
102. Левитов Н.Д. Детская и педагогическая психология \ Учеб. пособ. для пед. ин-тов. – М.: Учпедгиз , 1958. – 322с.
103. Леонтонович А. В. Учебно–исследовательская деятельность школьников как модель педагогической технологии \\ Народное образование – 1999.- №10.-С.152-158.
104. Леонтьев Л.Н. Деятельность. Сознание. Личность . – М.: Политиздат, 1975. - 304с.
105. Лернер И. Я. Дидактические основы методов обучения. – М.: Педагогика, 1981. – 186с.
106. Лихачева Л. В. Теоретические и методические основы использования коллективной учебно – исследовательской деятельности студентов при обучении математике в ССУЗАХ: Автореф. дис. …канд.пед.наук (13.00.02). – Орел, 2004. - 24с.
107. Лоповок Л.М. Задача исследовательского характера в VI классе \\ Вопросы обучения и воспитания. Ч.2. – Томск: изд-во АПО, 1975. - С, 86-94.
108. Лоповок Л.М. Тысяча проблемных задач по математике: кн. для уч-ся. – М.: Просвещение, 1995. -456с.
109. Лосский Н.О. Избранное. – М.: изд-во «Правда», 1991. -624с.
110. Лурия Р.А. Лекции по общей психологии. Питер, 2006. – 320 с.
111. Мательский Н. В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы: Учеб. пособ. для вузов. –М.; Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.
112. Математические олимпиады школьников /Книга для уч-ся общеобразовательных учреждений Сост. Н.Х. Агаханов, Л.П. Купцов Ю.В. Нестеренко и др. – М.: Просвещение, 1997. – 208с.
113. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении – М.: педагогика, 1972.- 208.

114. Махмутов М.И. Организация проблемного обучения – М.: Просвещение, 1977. – 240с.
115. Марков А.К.- Формирование мотивации учение в школьном возрасте: Пособие для учителя – М.: Педагогика 1983.-96с.
116. Мареев В.И.- Теоретические основы исследовательской деятельности преподавателей пед.вуза: Автореф.дис…докт.пед.наук. -Волгоград, 1999. -47с.
117. Маркушевич А.И. Преподавание в школе естественно – математических наук и формирование научного мировоззрения //Математика в школе.1976. -№2. -С.10-16
118. Меньшикова Н. А. Учебно–исследовательская математическая деятельность в средней школе как фактор приобщения к будущей научной работе: Дис. …канд. пед. наук (13. 00. 02). - Ярославль, 2003.- 176 с.
119. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособ. для студ. физ.- мат. фак. пед. ин-тов / В.А.Оганесян, Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
120. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: Учеб. пособ, для студ. пед. ин-тов / Сост. Р.С. Черкасов. А. А. Столяр. –М.: Просвещение.1985. – 336 с.
121. Митенева С.Ф. Нестандартные задачи по математике как средство развития творческих способностей учащихся: Автореф. дис. …канд. пед. наук. 13. 00. 02. – Киров, 2005. – 19 с.
122. Михеева Л.А. Формирование исследовательских умений в процессе обучения математике в начальной школе: Автореф. дис. …канд. пед. наук (13.00.02). -М., 2004.-16с.
123. Молчанова Е.А. Формирование творческой математической деятельности учащихся общеобразовательных учреждений посредством исследования задачной ситуации: Автореф. дис. … канд. пед. наук (13.00.02). -Саранск. 2005. -18 с.

124. Мор Томас. 1478- 1978: Идеалы и история культуры / Отв. ред. В.И. Рутенбург.- М.: Наука,1981. – 384 с.
125. Морозова Е.А., Петраков И.С. Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1967. – 176 с.
126. Мочалова Н.М. Методы проблемного обучения и границы их применения. – Казань: Изд-во Казанского университета,1979.- 157с.
127. Мясищев В.Н. Психология отношений: Избранные психологические труды / Под ред. А.А. Бодалева. – М.: Ин-т практ. психологии; Воронеж: Изд-во МОДЕК, 1998. – 363 с.
128. Немов Р.С. Психология: В 3 кн.: Кн.2. психология образования. – М.: Просвещение, 1995.- 496 с.
129. Нешков К.И. Функции задач в обучении // Математика в школе, - 1971.- №3. - С. 4-7.
130. Никитина С.В. Становление социальной компетентности старшеклассников современной общеобразовательной школы: Дис. …канд. пед. наук. 13.00.02.- Омск, 2004. - 214 с.
131. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология.М.:ИНЕРГ, 2007. -668с.
132. Ницше Ф. Избранные произведения / Сост. К.А. Свасьян. – М.: Просвещение, 1993.- 573 с.
133. Нугмонов М. Теоретико – методологические основы методики обучения математике. Дис.докт.пед.наук. - Душанбе, 1999. -306с.
134. Обухов А.С. Исследовательская деятельность как способ формирования мировоззрения // Народное образование. – 1999.- №10.- С. 158-160.
135. Оконь В. Основы проблемного обучения. – М.: Просвещение, 1968. – 208 с.
136. Окунев А.А. Спасибо за урок, дети! О развитии творческих способностей учащихся: Кн. для учителя: Из опыта работы. – М.: Просвещение , 1988. -128.

137. Ольбинский И. Б. Развитие задачи // Математика в школе.-1998.-№2.-С.15-16.
138. Орлов В.И. Знания, умения, навыки и обучение.-: Б.и., 1995. -45 с.
139. Оскорбин Д.Н. Организация исследовательской деятельности школьников на уроках математики в классах математического профиля \\ Современные проблемы методики преподавания математики и информатики: Материалы II Сибирских чтений \ Под общ ред. И. К. Жинерско и З.В. Семеновой. – Омск: ОмГПУ, 1997. – с.86-88.
140. Особенности обучения и психического развития школьников 13-17 лет \ Под ред. И.В.Дубровиной, - М.: Педагогика, 1988.-190с.
141. Охтеменко О.В. Исследовательские задания как средство формирования познавательного интереса и развития математического мышления учащихся на уроках алгебры в основной школе: Автореф. дис….канд. пед.наук (13.00.02). – М., 2003. -18с.
142. Перельман Я.И. Занимательная геометрия – М.: Госуд. изд-во физико – математической литературы, 1958. -304с.
143. Петровский В.А. Личность в психологии: парадигма субъектности\ Учеб. пособ. для студ. вузов. – Ростов- на- Дону: Феникс, 1996. -510с.
144. Петровский В.А. Личность, деятельность, коллектив. – М.: Политиздат, 1982. -255с.
145. Пестерева В.Л. Формирование исследовательских умений учащихся при изучении функций в курсе алгебры восьмилетней школы. Дис.канд.пед.наук. – Л., 1987. – 177с.
146. Пидкасистый П.И. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении. - М.: Педагогика, 1980. -240с.
147. Платон. Сочинения в 3-х т. = Т.2\ Пер. с древнегреч.. Под общ.ред. А.Ф. Лосева, В.Ф. Асмуса. – М.: Мысль, 1970. -610с.
148. Платонов К.К. О знаниях, умениях и навыках \\ Советская педагогика. – 1963. -№ 11.- С.98-103.

149. Позднякова Е.В. Формирование исследовательских умений учащихся основной школы в процессе обучения геометрии. Дис…канд.. пед.наук (13.00.02). – Новокузнецк, 2004. -232с.
150. Пойа Д. Как решать задачу? – Львов: Квантор, 1991. – 216с.
151. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. – М.: наука, 1970. -448с.
152. Пономарев Я.А. Психология творчества. – М.: наука, 1976. -303с.
153. Протопопова О.В. Предъявление индивидуальных требований к учащимся при реализации личностно - ориентированного обучения: Дис… канд. пед. наук. 13.00.01. – Тобольск, 2000. – 183с.
154. Психолого – педагогический словарь для учителей и руководителей общеобразовательных учреждений. – Ростов на Дону: изд-во Феникс, 1998.- 544с.
155. Равен Дж. Компетентность в современном обществе: выявление, развитие и реализация – М.: Изд-во Когито-центр, 2002. -396с.
156. Равен Дж. Педагогическое тестирование. Проблемы, заблуждения, перспективы, - М: Изд-во Когито-центр, 1999. -139с.
157. Раджабов Т.Б. Формирование исследовательских умений и навыков учащихся при изучении курса математики и физики. Автореф…канд.пед.наук. - М.1988. -16с.
158. Разумовский В.Г. Развитие творческих способностей учащихся в процессе обучения физика. - М.: Просвещение, 1975. -273с.
159. Райков Б.Е. Исследовательский метод в педагогической работе – Л.: Госиздат, 1924. -256с.
160. Реализация развивающего обучения на уроках математики: Метод, рекоменд.\ Сост. М.И.Бобенка. Ф.Ф. Колесова – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1998. -32с.
161. Рогоновский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособ. – Минск: Высшая школа, 1990. -268с.

162. Российская педагогическая энциклопедия :В 2-х т. -Т.2. \ Гл. ред. В.В. Давыдов. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1990. -672с.
163. Рузин Н.К. Задача как цель и средство обучения математике \\ Математика в школе. – 1980-№4.- С.13-15.
164. Рузин Н.К. Методика обучения и стимулирования поисковой деятельности учащихся по решению школьных математических задач.- Горький: Госкомиздат Марийской АССР, 1989. -80с.
165. Русо Ж.Ж. Педагогические сочинения. В 2-х т. Т. 2. \ Под. ред. Г.Н. Джибладзе. – М.: Педагогика, 1981.- 334с.
166. Савайленко В.К. Об обновлении тематики школьных задач \\ Математика в школе. -1994-№5. – С. 49-52.
167. Савиков А.И. Содержание и организация исследовательского обучения школьников – М.: Сентябрь, 2003. -204с.
168. Саранцев Г.И. – Методика обучения математике в средней школе: Учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов и университетов. – М.: Просвещение, 2002. – 224с.
169. Савенков А.И. Методика исследовательского обучения младших школьников/. А.И Савенков – 2-е изд., испр. и дон. – Самара: Издательство «Учебная литература», 2007. -208с.
170. Седакова В.И. Проблемное обучение на занятиях по математике Сб. науч.-метод. работ. Вып.1 \ Отв. ред. П.И. Совертков. – Сургут: Изд – во РИО СурГПИ, 2005. -С. 28-40.
171. Сенкевич Л.Б. Формирование информационной компетентности будущего учителя математики средствами информационных и коммуникационных технологий: Автореф. дис…канд. пед. наук. 13.00.02. - Омск, 2005. -21с.
172. Середа Т.Ю. Теоретические основы формирования и развития творческой математической деятельности учащихся на уроках математики: Автореф. дис…канд. пед.наук.13.00.02.- М., 2005. -20с.

173. Сериков В.В. Личностно – развивающая образовательная модель в аспекте модернизации российского образования \\ Модернизация педагогического образования в Сибири: проблемы и перспективы Ч. 1: Сборник науч. Статей. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2002. -С.155-172.
174. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий: Т.1.М.:НИИ школьных технологий, 2006. -816с.
175. Серова Н.А. Целеполагание в условиях личностно – ориентированного обучения математике в средней школе: Автореф. дис...канд.пед.наук (13.00.02).- Саранск, 2004. -22с.
176. Селезнева Е.В. – Технология проектирования дифференцированных блоков геометрических задач в основной школе (7 кл.). Дис...канд.пед.наук. –Омск, 2006. – 170с.
177. Скарбич С.Н. Формирование исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения решению планиметрических задач в условиях личностно – ориентировании подхода. Дис…канд..изд. наук. –Омск, 2006. -252с.
178. Скарбич С.Н. Формирование исследовательских умений в процессе решения задач \\ Молодежь. Наука. Творчество. Сб. статей II-й межвузовской науч.- прак. конференции студентов и аспирантов. В 2 частях. -Ч. 1 – Омск: изд-во ОмГИС, 2004. -С.87-89.
179. Скаткин М.Н. Совершенствование процесса обучения. – М.: Педагогика, 1971- 206с.
180. Совертков П.И. Лыга Е.В. Разработка проекта по моделированию точки Жергонна \\ Математическое моделирование и вычислительные технологии в науке и образовании: Межвузовский сборник науч. тр. Вып.2. /Отв. ред. Ю. А.Сигунова. – Сургут: Изд-во РИОСур ГПИ, 2005. -С. 49
181. Совертков П.И. Проектирование поиского – исследовательской деятельности учащихся и студентов по математике и информатике, Сургут: изд-во СурГПИ, 2004. -361с.

182. Сомолина Л.В. Скарбич С.Н. Продуктивная деятельность в обучении компьютерным технологиям обработки графики \\ Повышение квалификации педагогических кадров по программе Intel «Обучение для будущего: Опыт и перспективы развития регионального Центра компьютерных технологий обучения на базе ОмГПУ». Материалы науч-прак. конференции. – Омск: изд-во ОмГПУ, -2002. – С.37-41.
183. Современный словарь иностранных слов: толкование, словоупотребление, этимология.\ Л.М. Баш, А.В. Боброва и др. Изд. 3, -М Цитадель Тренц, -2002. - 960с.
184. Стандарт основного общего образования по математике. Стандарт среднего (полного) общего образования по математике//Математика в школе.- М.,2004.-№4. -С.4-16.
185. Столяр А. А. Методы обучения математике / Учеб. пособие для физ-мат. фак. пед. ун-тов и мат. фак. ун-тов. -М: Высшая школа, 1996 – 190 с.
186. Талызина Н.Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников/Книга для учителя, - М: Просвещение, 1988. – 175 с.
187. Танцоров С.Т. Групповая работа в развивающем образовании. Исследовательская разработка для учителя.- Рига: Педагог. центр «Эксперимент», 1997.- 44 с.
188. Тараканова О.В. Задачи с избыточными и не достающими данными с точки зрения развития интереса и прикладной направленности преподавания математики \\ Вопросы совершенствования преподавания математики в средней школе. - Ч . 2. – М.: МГПИ. им. В.И. Ленина.1988.-140с.
189. Таранова М. В. Учебно-исследовательская деятельность как фактор повышения эффективности обучения математике учащихся профильных классов: Дис. …канд. пед. наук. 13.00.02.-Новосибирск, 2003.-190 с.

190. Теоретические основы обучения математике в средней школе \ Учеб. пособие : Т. А. Ивановой, Е.Н. Перевощикова, Т.П.Григорьева Л.Г.Кузнецова. Под ред. профессора Т. А. Ивановой. - Новгород: НГПУ,2003. -320с.
191. Тирская Е.А. Проектирование учебной деятельности старшеклассников в условиях личностно–ориентированного обучения: Автореф . …дис. канд.пед. наук (13.00.01). -Омск, 1999.-24с.
192. Толпскина Н. В.Методика организации учебных исследований при обучении учащихся решению уравнений, неравенств и их систем с параметрами: Дис…канд.пед.наук (13 .00. 02).- Омск, 2002. -185с.
193. Усова А.В. О критериях и уровнях сформированности умений учащихся \\ Советская педагогика .- 1980.-№12. -С.45-48.
194. Ушинский К.Д. Избранные педагогические сочинения \ Сост. Н.А.Сундуков. –М.: Просвещение, 1968. -557с.
195. Филоленко Л.А Учебные исследования в домашних заданиях по математике как средство развития творческой самостоятельности учащихся 5-6 классов: Авторе дисс…канд. пед. наук (13.00.02). -Омск, 2004. -22 с.
196. Фадеев А.Ю. Формирование исследовательских умений учащихся посредством компьютерных технологий в процессе изучения пропедевтического курса физика: Автореф.дис…канд.пед.наук (13.00.02).-Челябинск, 2002. -24с.
197. Фонин Д.С. Моделирование как основа обучения решению задач разными способами // Математика в школе. – 1994. - №2. – С.15-18.
198. Франкл В. Человек в поисках смысла / Пер. с англ. и нем. Языков. Под общ. ред. Л.Я. Гозмана и Д.А. Леонтьева. – М.: Прогресс, 1990.-368 с.

199. Фридман Л.М. Изучение процесса личностного развития ученика. – М.: Ин – т простр - рой психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1998.-58 с.
200. Фридман Л.М. Как научить решать задачи – М.: Московский психолого – социальный институт. - Воронеж: НПО «МОДЭК», 1999.-240 с.
201. Фридман Л.М. Логико – психологический анализ школьных учебных задач. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.
202. Харьковская В.Ф. Индивидуальный подход к слабоуспевающим школьникам в процессе обучения: Автореф. дис. … канд. пед. наук (13.00.02).- М., 1974. -18 с.
203. Хуторский А.В. ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования // Народное образование.- 2003.-№5. -С.55-61.
204. Хуторский А.В. Методика личностно – ориентированного обучения. Как обучить всех по-разному? – М.: Изд-во ВЛАДОС-ПРЕСС, 2005. - 383 с.
205. Целебровская М.Ю. Технология реферативно-исследовательской деятельности учащихся в математических дисциплинах: Автореф. дис. … канд. пед.наук (13.00.02).-Новосибирск, 2002.-24 с.
206. Челябов И.М. Разработка системы организации исследовательской работы учащихся в процессе изучения факультатива по математике в 7-11 классах. Дисс. … канд.пед.наук (13.00.02).- Махачкала, 1998.-178 с.
207. Черемухина Т.В. Индивидуальный подход к учащимся при обучении химии в вечерней (сменной) средней образовательной школе: Автореф. дис. …канд. пед. наук (13.00.02).- М., 1973. -28с.
208. Чернышева С.Н. Развитие исследовательских умений учащихся сельской школы. Http:/www.cross-edu.ru/Teacher PeopIese2.Htm.

209. Шамова Т.Н. – Активизация учения школьников. М.: Педагогика, 1982. – 209с.

210. Шеренцова О.М. Обучение поиску способа решения геометрической задачи учащихся основной школы. Автореф. дис. …канд.пед. наук (13.00.02).-Саранск, 2004. -18 с.

211. Шестов Л. Апофеоз беспочвенности: Опыт догматического мышления. Л.: Ленинград. ун-т, 1991. -214 с.

212. Шикова Л.Р. Исследовательская деятельность школьников в процессе решения геометрических задач // Математика в школе. - 1995. - №4. – С.13-17.

213. Шиянов Е.Н., Котова И.Б. Развитие личности в обучении. – М.: Изд. центр «Академия», 2000. – 288 с.

214. Шинкаренко Е.Г. – К вопросу о формировании исследовательских умений у учащихся основной школы. // Наука и школа. -Москва. – 2008, №4.

215. Шварцбурд С.И., Фирсов В.В. Состояние и перспективы факультативных занятий по математике. -М.: Просвещение. 1977. – 48 с.

216. Щукина Г.И., Люблинская А.А. Организация и техника педагогического эксперимента.//В кн. Теория и практика педагогического эксперимента. – М.: Педагогика, 1979.

217. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.

218. Эсаулов А.Ф. Психология решения задач. – М.: Высшая школа,1972, - 127 с.

219. Ягодовский К.П. Практические занятия по естествознанию в начальной школе. – М .: Учпедгиз, 1948. – 307с.

220. Якиманская И.С. Разработка технологии личностно-ориентированного обучения. // Вопросы психологии. -1995 - №2. – С. 31-41.
221. Якиманская И.С. Технология личностно-ориентированного образования. – М.: Сентябрь, 2000. – 176 с.
222. Ярков В.Г. Типы исследовательских задач и этапы их решения // Проблемы педагогической инноватики в профессиональной школе: Материалы 6-й Межрегиональной межотраслевой науч.-прак. конференции. – Санкт-Петербург, 2005. - С.114-116.
223. Bruner. J.S. Acts of meaning. – CambridgeMa: Harvard University Press.
224. Johnson D.W., Johnson R.T. Learning together and done: Cooperative, cooperative, and individualistic learning. – Boston: Allyn & Bacon, 1994.
225. Maslov A.H. Motivation and personalit. – New York: Harper & Row, 1970.
226. Rogers C.R. Client-centered therapy: Its current practice, implications and theory. – Boston MA: Houghton Mifflin, 1951.
227. Sharan Y., Sharan S. Expanding cooperative learning group investigation. – New York: Columbia University, Teachers Collage Press, 1992.